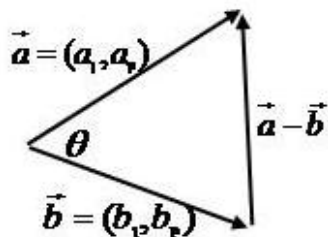


به نام خدا

هندسه ۳ - فصل بردارها - درس دوم - ضرب داخلی و ضرب خارجی بردارها



فرض کنید دو بردار  $\vec{a} = (a_1, a_2)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2)$  همانند شکل زیر داده شده اند.

زاویه  $\theta$  بین این دو بردار را چگونه می توان یافت؟ برای این منظور بردار

تفاضل  $\vec{a} - \vec{b}$  را نیز در شکل مقابل رسم کرده ایم تا مثلی به طول اضلاع زیر بدست

$$|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{b_1^2 + b_2^2}$$

$$|\vec{a} - \vec{b}| = \sqrt{(a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2}$$

اکنون با استفاده از قضیه کسینوسها که سال گذشته آموخته اید می توان نوشت.

$$|\vec{a} - \vec{b}|^2 = |\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - 2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow \frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = |\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta \Rightarrow$$

$$\cos\theta = \frac{\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2)}{|\vec{a}||\vec{b}|} \quad (1)$$

از طرفی صورت کسر فوق را میتوان با توجه به اندازه های اضلاع مثلث که قبلا محاسبه شده اند بصورت زیر ساده کرد.

$$\frac{1}{2}(|\vec{a}|^2 + |\vec{b}|^2 - |\vec{a} - \vec{b}|^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + b_1^2 + b_2^2 + (a_1 - b_1)^2 + (a_2 - b_2)^2)$$

$$= \frac{1}{2}(2a_1b_1 + 2a_2b_2) = a_1b_1 + a_2b_2$$

پس عبارت (۱) بصورت زیر بدست می آید.

$$\cos\theta = \frac{a_1b_1 + a_2b_2}{|\vec{a}||\vec{b}|}$$



رابطه فوق برای حالتی که دو بردار هم راستا باشند نیز برقرار است (چرا؟). با محاسبه عبارت سمت راست و حل معادله مقدار  $0 \leq f \leq \pi$  بدست می آید.

کمیتی که در صورت این کسر سمت راست ظاهر شده است را معمولاً با  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نشان می دهند و به آن حاصلضرب داخلی یا حاصلضرب نقطه ای دو بردار  $\vec{a}, \vec{b}$  می گویند. بنابراین می توان نوشت.

$$\cos \theta = \frac{a_1 b_1 + a_2 b_2}{|\vec{a}| |\vec{b}|} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{a}| |\vec{b}|}$$

همچنین از روابط فوق معلوم است که

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

بطور مشابه حاصلضرب داخلی دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  نیز قابل تعریف است.

تعریف: اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار در  $\mathbb{R}^3$  باشند؛ در اینصورت ضرب داخلی  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  در  $\vec{b}$  را که با نماد  $\vec{a} \cdot \vec{b}$  نمایش می دهیم بصورت زیر تعریف می کنیم

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

با اثباتی مشابه قبل می توان نشان داد که اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار ناصفر  $\vec{a}, \vec{b}$  در  $\mathbb{R}^3$  باشند آنگاه

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta$$

از تعریف ضرب داخلی واضح است که اگر یکی از دو بردار  $\vec{a}, \vec{b}$  صفر باشند آنگاه  $\vec{a} \cdot \vec{b} = 0$  هر چند که در این حالت زاویه  $\theta$  بین دو بردار تعریف نمی شود.

مثال: زاویه بین دو بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  و  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  را پیدا می کنیم.

حل: ابتدا ضرب داخلی دو بردار را بصورت زیر بدست می آوریم.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = (2 \times 1) + (-1 \times -1) + (2 \times 0) = 3$$

از طرفی اگر  $0 \leq \theta \leq \pi$  زاویه بین دو بردار باشد خواهیم داشت

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \Rightarrow \sqrt{3^2 + (-1)^2} \sqrt{1^2 + (-1)^2} \cos \theta \Rightarrow$$

$$\cos \theta = \frac{3}{3\sqrt{2}} \Rightarrow \theta = \frac{\pi}{4}$$

خواص ضرب داخلی

$$1. \vec{a} \cdot \vec{b} = \vec{b} \cdot \vec{a} \quad \text{خاصیت جابجایی}$$

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 = b_1 a_1 + b_2 a_2 + b_3 a_3 = \vec{b} \cdot \vec{a}$$

$$2. \vec{a} \cdot \vec{a} = |\vec{a}|^2$$

$$\vec{a} \cdot \vec{a} = a_1 a_1 + a_2 a_2 + a_3 a_3 = a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 = |\vec{a}|^2$$

$$3. \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) = \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \quad \text{خاصیت شرکت پذیری}$$

$$\begin{aligned} \vec{a} \cdot (\vec{b} + \vec{c}) &= a_1 (b_1 + c_1) + a_2 (b_2 + c_2) + a_3 (b_3 + c_3) \\ &= a_1 b_1 + a_1 c_1 + a_2 b_2 + a_2 c_2 + a_3 b_3 + a_3 c_3 \\ &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 + a_1 c_1 + a_2 c_2 + a_3 c_3 \\ &= \vec{a} \cdot \vec{b} + \vec{a} \cdot \vec{c} \end{aligned}$$

$$4. \vec{a} \perp \vec{b} \Leftrightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} = 0 \quad \text{یعنی بردارهای } \vec{a} \text{ و } \vec{b} \text{ برهم عمودند و بردارها نیز غیرصفر باشند.}$$

$$ab = \theta \Leftrightarrow |a| |b| \cos \theta = \theta \Leftrightarrow \cos \theta = \frac{\theta}{|a| |b|} \Leftrightarrow \theta = \frac{f}{\gamma}$$

$$5. |\vec{a} \cdot \vec{b}| \leq |\vec{a}| |\vec{b}| \quad \text{(نامساوی کشی شوارتز) منظور از } |\vec{a} \cdot \vec{b}| \text{ قدر مطلق مقدار } \vec{a} \cdot \vec{b} \text{ است.}$$

$$\left| \vec{a} \cdot \vec{b} \right| = \left| |\vec{a}| |\vec{b}| \cos \theta \right| = |\vec{a}| |\vec{b}| |\cos \theta| \leq |\vec{a}| |\vec{b}|$$

که در آخرین نامساوی از  $|\cos \theta| \leq 1$  استفاده شده است.

دو بردار غیرصفر  $\vec{a}, \vec{b}$  را که زاویه بین آنها  $\theta$  است با فرض  $0 < \theta < \frac{\pi}{2}$  در نظر می گیریم. می

خواهیم تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  را بر امتداد بردار  $\vec{b}$  که آن را با  $\vec{a}'$  نمایش داده ایم بدست آوریم. از روی

شکل مشخص است که  $\vec{a}' = r\vec{b}$  برای یک  $r$  حقیقی. با توجه به اینکه بردار تفاضل  $\vec{a}$  از  $\vec{a}'$  بر بردار  $\vec{b}$  عمود است. خواهیم داشت:

$$(\vec{a} - \vec{a}') \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow (\vec{a} - r\vec{b}) \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow \vec{a} \cdot \vec{b} - r\vec{b} \cdot \vec{b} = 0 \Rightarrow r = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2}$$

بنابراین بردار تصویر قائم  $\vec{a}$  بر امتداد بردار  $\vec{b}$  بصورت زیر بدست می آید.

$$\vec{a}' = r\vec{b} = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b}$$

مثال: تصویر قائم بردار  $\vec{a} = (2, -1, 2)$  را بر امتداد بردار  $\vec{b} = (1, -1, 0)$  بیابید.

$$\vec{a} \cdot \vec{b} = 2 \times 1 + (-1)(-1) + (2)(0) = 3$$

$$|\vec{b}| = \sqrt{(1)^2 + (-1)^2 + 0^2} = \sqrt{2}$$

$$\vec{a}' = \frac{\vec{a} \cdot \vec{b}}{|\vec{b}|^2} \vec{b} = \frac{3}{2} \vec{b} = \frac{3\sqrt{2}}{2} (1, -1, 0) = \left( \frac{3\sqrt{2}}{2}, -\frac{3\sqrt{2}}{2}, 0 \right)$$

کار در کلاس

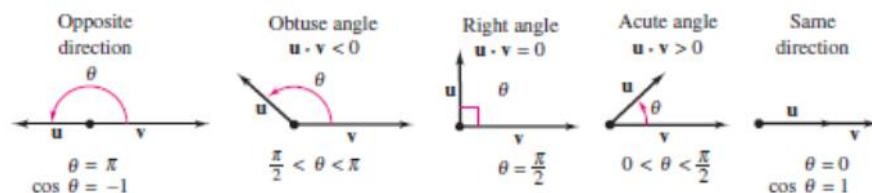
۱- تصویر بردار  $\vec{i} = (1, 0, 0)$  بر امتداد بردار  $\vec{j} = (0, 1, 0)$  را بیابید.

۲- نشان دهید که اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  بر هم عمود باشند آنگاه تصویر یکی بر امتداد دیگری بردار صفر می شود.

۳- نشان دهید که اگر دو بردار  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  در یک راستا باشند آنگاه تصویر  $\vec{a}$  بر  $\vec{b}$  برابر خود  $\vec{a}$  می شود.

۴- هر یک از حالات زیر را با شکل های داده شده نظیر کنید.

الف)  $ab > 0$  ب)  $ab = 0$  پ)  $ab < 0$  ت)  $ab = |a||b|$  ج)  $ab = -|a||b|$



## ضرب خارجی

در بخش قبل دیدیم که ضرب داخلی دو بردار همواره عددی حقیقی است. می توان ضرب دو بردار را به گونه ای تعریف کرد که حاصلضرب آنها همواره یک بردار باشد.

تعریف. فرض کنیم  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. ضرب داخلی  $\vec{a}$  و  $\vec{b}$  را که با نماد  $\vec{a} \times \vec{b}$  نمایش می دهیم به صورت زیر تعریف می شود

$$\begin{aligned} \vec{a} \times \vec{b} &= \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ a_1 & a_2 & a_3 \\ b_1 & b_2 & b_3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_2 & a_3 \\ b_2 & b_3 \end{vmatrix} \vec{i} + \begin{vmatrix} a_1 & a_3 \\ b_1 & b_3 \end{vmatrix} \vec{j} + \begin{vmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{vmatrix} \vec{k} \\ &= (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_1 b_3 - a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1) \end{aligned}$$

مثال. بردارهای  $i$  و  $j$  در  $\mathbb{R}^3$  در نظر بگیرید. حاصل  $\vec{j} \times \vec{i}$  و  $\vec{i} \times \vec{j}$  را به دست آورید.

$$i \times j = (1, 0, 0) \times (0, 1, 0) = ((0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(0), (1)(1) - (0)(0)) = (0, 0, 1) = \vec{k}$$

$$j \times i = (0, 1, 0) \times (1, 0, 0) = ((1)(0) - (0)(0), (0)(0) - (0)(1), (0)(0) - (1)(1)) = (0, 0, -1) = -\vec{k}$$

همانطور که مشاهده شد حاصلضرب خارجی دو بردار  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  برابر با بردار برابر با بردار  $\vec{k}$  شد که بر هر دوی  $\vec{i}$  و  $\vec{j}$  می باشد. ضرب خارجی دارای خواص زیر می باشد.

خاصیت ۱: فرض کنید  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار باشند. در این صورت

$$a.(a \times b) = 0, \quad b.(a \times b) = 0$$

این خاصیت گویای این مطلب است که حاصلضرب خارجی دو بردار برابر بردار عمود بر آنهاست برقرار است.

اثبات.

$$a.(a \times b) = a_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + a_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + a_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

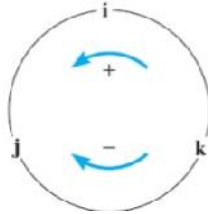
$$b.(a \times b) = b_1(a_2 b_3 - a_3 b_2) + b_2(a_3 b_1 - a_1 b_3) + b_3(a_1 b_2 - a_2 b_1) = 0$$

می توان نشان داد که برای سه بردار یک  $i$  و  $j$  و  $k$  روابط زیر برقرار است

$$i \times j = k, j \times k = i, k \times i = j$$

$$j \times i = -k, k \times j = -i, i \times k = -j$$

معمولاً این روابط را بصورت نمودار چرخشی زیر نمایش نیز می دهند.



اگر  $\vec{a} = (a_1, a_2, a_3)$  و  $\vec{b} = (b_1, b_2, b_3)$  دو بردار غیر صفر و " زاویه بین آنها باشد اندازه بردار  $a \times b$  می شود:

$$|a \times b|^2 = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= (a_2 b_3 - a_3 b_2)^2 + (a_3 b_1 - a_1 b_3)^2 + (a_1 b_2 - a_2 b_1)^2$$

$$= a_2^2 b_3^2 - 2a_2 a_3 b_2 b_3 + a_3^2 b_2^2 + a_1^2 b_3^2 - 2a_1 a_3 b_1 b_3 + a_3^2 b_1^2 - 2a_1 a_2 b_1 b_2 + a_2^2 b_1^2$$

$$= (a_1^2 + a_2^2 + a_3^2)(b_1^2 + b_2^2 + b_3^2) - (a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3)^2 = |a|^2 |b|^2 - (a \cdot b)^2$$

$$= |a|^2 |b|^2 - |a|^2 |b|^2 \cos^2 \theta = |a|^2 |b|^2 (1 - \cos^2 \theta) = |a|^2 |b|^2 \sin^2 \theta = (|a| |b| \sin \theta)^2$$

بنابراین اندازه بردار  $a \times b$  برابر است با

$$|a \times b| = |a| |b| \sin \theta$$

با توجه به مطالب سال قبل سمت راست عبارت فوق برابر است با مساحت متوازی الاضلاعی که اضلاع آن برابر  $|a|$ ،  $|b|$  است. بنابراین می توان گفت که ضرب خارجی دو بردار، برداری است عمود بر آنها که اندازه آن از لحاظ عددی برابر با مساحت متوازی الاضلاع مذکور است.

ضرب خارجی دارای خواص متعددی است که در زیر برخی از آنها اشاره شده است. در زیر یکی از این خواص را اثبات می کنیم.

خاصیت ۲:  $a \times b = -b \times a$ .

خاصیت ۳:  $\vec{a} \times \vec{a} = \vec{0}$ .

خاصیت ۴: اگر  $r$  عددی حقیقی باشد آنگاه:  $ra \times b = r(a \times b) = a \times rb$ .

خاصیت ۵: برای سه بردار  $a, b, c$  داریم:

$$a \times (b + c) = a \times b + a \times c$$

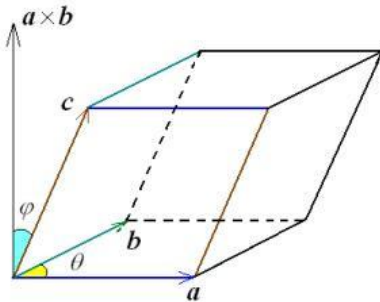
$$(a + b) \times c = (a \times c) + (b \times c)$$

خاصیت ۶: دو بردار غیر صفر  $a, b$  با هم موازی هستند اگر و فقط اگر  $\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0}$ .  
اثبات.

$$\vec{a} \times \vec{b} = \vec{0} \Leftrightarrow |a \times b| = 0 \Leftrightarrow |a| |b| \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \sin \theta = 0 \Leftrightarrow \theta = 0 \quad \theta = f \Leftrightarrow \vec{a} \parallel \vec{b}$$

### حجم متوازی السطوح

اگر  $a, b, c$  سه بردار غیر واقع در یک صفحه باشند آنگاه متوازی السطوحی همانند شکل زیر می توان به کمک آنها تولید کرد.



همانطور که از شکل مشخص است ارتفاع این متوازی السطوح برابر است با تصویر قائم بردار  $\vec{a}$  روی بردار  $b \times c$  یعنی

$$\text{ارتفاع} = \frac{a \cdot (b \times c)}{|b \times c|} (b \times c)$$

با توجه به اینکه قاعده این متوازی السطوح توسط بردارهای  $b$  و  $c$  تولید شده پس مساحت آن برابر است با  $|b \times c|$ .

بنابراین حجم متوازی السطوح به صورت زیر به دست می آید:

$$\text{اندازه ارتفاع} \times \text{مساحت قاعده} = |b \times c| \frac{a \cdot (b \times c)}{|b \times c|} (b \times c) = |a \cdot (b \times c)|$$

از شکل فوق واضح است که اگر سه بردار در یک صفحه قرار بگیرند آنگاه حجم متوازی السطوح برابر صفر است و از رابطه بالا نیز این مطلب قابل اثبات است. لذا در این حالت خاص نیز حجم متوازی السطوح برابر است با  $|a \cdot (b \times c)|$ .

مثال. حجم متوازی السطوحی را به دست آورید که توسط بردارهای  $a = (1, 1, 0), b = (0, 1, 1), c = (1, 0, 1)$  تولید میشود.

حل. با استفاده از ضرب خارجی  $b$  در بردار  $c$  به دست می آید.

$$b \times c = (1, 1, -1)$$

بنابراین حجم متوازی السطوح به دست می آید

$$V : |a.(b \times c)| = |(1, 1, 0).(1, 1, -1)| = |1 + 1 + 0| = 2$$

پیش تر اشاره شد که اگر سه بردار  $a$  و  $b$  و  $c$  در یک صفحه باشند آنگاه حجم متوازی السطوح و نیز  $|a.(b \times c)|$  برابر صفر میشود. عکس این مطلب نیز صادق است و از آن برای بررسی اینکه سه بردار داده شده در یک صفحه هستند یا نه استفاده می شود.

مثال. آیا بردارهای  $a = (2, 2, -1), b = (1, -1, 2), c = (1, 9, -1)$  در یک صفحه اند؟

حل. برای این منظور کافی است  $a.(b \times c)$  را بدست آوریم. اگر مقدار آن صفر باشد یعنی حجم متوازی السطوح تولیدشده صفر است و این یعنی سه بردار در یک صفحه اند در غیر این صورت سه بردار در یک صفحه نیستند

$$b \times c = (-16, 14, 10) \Rightarrow a.(b \times c) = -32 + 42 - 10 = 0 \Rightarrow \text{سه بردار در یک صفحه هستند}$$

## تمرین

- ۱- برای هر یک از بردارهای  $a$  و  $b$  که در زیر آمده است تصویر قائم  $a$  را بر امتداد  $b$  بدست آورید.
- ۲- فرض کنید  $a$  و  $b$  و  $c$  بردارهایی باشند به ترتیب به طولهای ۱ و ۲ و ۳ با این خاصیت که  $a + b + c = 0$ . مقدار  $a \cdot b + b \cdot c + c \cdot a = 0$  را محاسبه کنید.
- ۳- سه بردار  $a$  و  $b$  و  $c$  مثال بزنید که برای آنها  $a \cdot b = a \cdot c$  ولی  $b \neq c$ .
- ۴- اگر  $a = (1, -2, 4), b = (2, -4, 2), c = (-1, 1, 4)$  باشند آنگاه تصویر قائم  $a$  بر امتداد  $b + c$  را بدست آورید.
- ۵- برداری عمود بر دو  $a = (1, -2, 2), b = (-2, 1, -5)$  بردار پیدا کنید.
- ۶- سه بردار  $a$  و  $b$  و  $c$  مثال بزنید که برای آنها  $a \times b = a \times c$  ولی  $b \neq c$ .
- ۷- بردارهای  $a$  و  $b$  مفروضند بطوریکه  $|a| = 3, |b| = 26, |a \times b| = 72$ . مقدار  $a \cdot b$  را محاسبه کنید.
- ۸- مساحت مثلثی که رئوس آن با نقاط  $A = (3, 5, 7), B = (5, 5, 0), C = (-4, 0, 4)$  داده شده است را بیابید.