

دنباله حسابی (تصاعد عددی)

دنباله حسابی رشته ای از اعداد حقیقی است که هر جمله اش با افزودن عدد ثابتی به جمله ما قبلش بوجود می آید. این عدد ثابت را که مخالف صفر باشد، قدر نسبت دنباله حسابی می گوئیم و آن را با نماد d نمایش می دهند و داریم :

$$a, a + d, a + 2d, \dots, a + nd, \dots, a + (n - 1)d, \dots$$

$$\begin{array}{ccccccc} \downarrow & \downarrow & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ t_1 & , & t_2 & , & t_3 & , & \dots & t_n & , & \dots \end{array}$$

t_n را جمله عمومی یا جمله n ام دنباله حسابی می گویند.

در دنباله حسابی فرمول ها و روابط زیر برقرار است :

$$1) d = t_2 - t_1 = t_3 - t_2 = \dots = t_n - t_{n-1}$$

$$2) t_n = t_1 + (n - 1)d = a + (n - 1)d$$

مثال : بین دو عدد ۳۰ و ۵۰۰ چند عدد مضرب ۷ وجود دارد؟

نکته: در دنباله حسابی با داشتن دو جمله از آن دنباله ، می توان قدر نسبت را بدست آوریم.

(فرض کنید t_m و t_n دو جمله از یک دنباله حسابی باشند)

$$d = \frac{t_m - t_n}{m - n}$$

مثال: هر گاه جملات نهم و چهارم یک دنباله حسابی به ترتیب ۲۲ و ۷ باشند، قدر نسبت دنباله ، جمله عمومی و جمله صدم این دنباله را بدست آورید.

نکته: اگر c و b و a سه جمله متوالی (پشت سرهم) از یک دنباله حسابی باشند، بین این سه جمله رابطه زیر برقرار است :

$$b = \frac{a+c}{2} \text{ یا } a + c = 2b$$

در این حالت عدد b را واسطه حسابی دو عدد a و c می گویند.

مثال: اگر $x - 1$ ، $2x + 1$ ، $4x + 5$ سه جمله متوالی از یک دنباله حسابی باشند، آنگاه مقدار x را بدست آورید.

مثال: به ازای چه مقداری از a ، مجموع، حاصل ضرب و تفاضل ریشه های معادله درجه دوم

$$x^2 - (2a + 3)x + a = 0$$
 تشکیل دنباله حسابی می دهند؟

نکته: هرگاه بین دو عدد b و a ، m واسطه حسابی را درج کنیم (قرار دهیم)، قدر نسبت دنباله حسابی از رابطه روبرو بدست می آید:

$$d = \frac{b - a}{m + 1}$$

در واقع ما دنبال m عدد میگردیم تا آنها را بین a و b قرار داده و اعداد (رشته) حاصل تشکیل دنباله حسابی دهند.

مثال: بین دو عدد ۷ و ۲۵، پنج واسطه حسابی درج کرده ایم، قدر نسبت دنباله و واسطه ها را بدست آورید.

نکته: در دنباله حسابی اگر قدر نسبت مثبت باشد، (یعنی $d > 0$) دنباله صعودی و اگر قدر نسبت منفی باشد، (یعنی $d < 0$) دنباله نزولی است.

مجموع جملات دنباله حسابی

در یک دنباله حسابی، مجموع n جمله اول دنباله از رابطه های زیر بدست می آید:

$$\begin{cases} S_n = \frac{n}{2} [2a + (n-1)d] \\ S_n = \frac{n}{2} (t_1 + t_n) \end{cases}$$

در فرمول های روبرو :

S_n : مجموع n جمله اول دنباله حسابی

n : تعداد جملاتی که قرار است با هم جمع شوند.

a و t_1 : جمله اول دنباله

d : قدر نسبت و t_n : جمله آخر دنباله داده شده

به کمک فرمول های گفته شده در بالا می توان به نتایج زیر در جمع اعداد طبیعی، اعداد طبیعی فرد و اعداد طبیعی زوج رسید :

$$\begin{cases} 1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{\text{عدد بعدیش} \times \text{آخرین عدد}}{2} \\ 2 + 4 + 6 + 8 + \dots + 2n = n(n+1) = (\text{نصف آخرین عدد} + 1) \times \text{نصف آخرین عدد} \\ 1 + 3 + 5 + \dots + 2n-1 = n^2 = \left(\frac{\text{آخرین عدد} + 1}{2}\right)^2 \end{cases}$$

مثال : حاصل $1 + 3 + 5 + \dots + 49$ را بدست آورید.

مثال : مجموع اعداد طبیعی سه رقمی مضرب ۵ را بدست آورید.

مثال : مجموع چند جمله اول دنباله حسابی ... ، 13 ، 9 ، 5 ، 1 برابر 780 است؟

مثال : در دنباله حسابی ... ، 11 ، 8 ، 5 حداقل چند جمله اول آن را با جمع کنیم تا حاصل آن از 493 بیشتر شود؟

مثال: در بیست جمله اول یک دنباله حسابی، مجموع جملات شماره های فرد ۱۳۵ و مجموع جملات شماره های زوج ۱۵۰ می باشد. جمله اول و قدر نسبت این دنباله را بدست آورید.

مثال: حداقل چند جمله اول دنباله ... ، - 16 ، - 19 ، - 22 را با هم جمع کنیم که حاصل آن مثبت شود؟

نکته مهم: به طور کلی هرگاه فرمول S_n را داشته باشیم، می توانیم جمله عمومی دنباله حسابی را بدست آوریم:

$$\left\{ \begin{array}{l} S_1 = t_1 \\ S_2 = t_1 + t_2 \\ S_3 = t_1 + t_2 + t_3 \\ \vdots \\ S_{n-1} = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} \\ S_n = t_1 + t_2 + \dots + t_{n-1} + t_n \end{array} \right. \quad \Rightarrow \quad \left\{ \begin{array}{l} S_2 - S_1 = t_2 \\ S_3 - S_2 = t_3 \\ \vdots \\ S_n - S_{n-1} = t_n \end{array} \right.$$

همچنین با داشتن رابطه مجموع n جمله اول دنباله حسابی می توانیم با استفاده از رابطه زیر قدر نسبت دنباله را نیز محاسبه کنیم :

$$d = s_n - 2S_{n-1} + S_{n-2}$$

مثال : در یک دنباله حسابی مجموع n جمله اول از رابطه $S_n = n^2 + 2n$ بدست می آید. جمله عمومی و قدر نسبت این دنباله را بدست آورید.

دنباله هندسی (تصاعد هندسی)

دنباله هندسی رشته ای از اعداد حقیقی است که هر جمله اش با ضرب شدن عدد ثابتی در جمله ما قبل خودش بدست می آید. این عدد ثابت را که مخالف صفر می باشد، قدر نسبت دنباله می گویند و آن را با نماد r یا q نشان می دهند، پس داریم :

$$a, aq, aq^2, \dots, aq^9, \dots, aq^{n-1}, \dots$$

↓ ↓ ↓ ↓ ↓

$$t_1, t_2, t_3, \dots, t_{10}, \dots, t_n, \dots$$

در دنباله هندسی روابط و فرمول های زیر برقرار است :

$$۱) q = \frac{t_2}{t_1} = \frac{t_3}{t_2} = \dots = \frac{t_n}{t_{n-1}}$$

$$۲) t_n = t_1 q^{n-1} \text{ یا } t_n = a q^{n-1}$$

در یک دنباله هندسی با داشتن دو جمله از دنباله می توانیم قدر نسبت دنباله (q) را بدست آوریم :
(t_m و t_n دو جمله از یک دنباله هندسی هستند.)

$$\begin{cases} q = \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} & \text{(هرگاه } (m-n) \text{ فرد باشد،)} \\ q = \pm \sqrt[m-n]{\frac{t_m}{t_n}} & \text{(هرگاه } (m-n) \text{ زوج باشد،)} \end{cases}$$

مثال : هرگاه جملات سوم و هفتم یک دنباله هندسی به ترتیب $\frac{1}{4}$ و $\frac{81}{4}$ باشد، قدر نسبت را بدست آورید.

نکته : شرط اینکه سه عدد a و b و c تشکیل دنباله هندسی دهند (یا سه جمله متوالی از یک دنباله هندسی باشند) عبارت است از :

$$b = \pm \sqrt{ac} \text{ یا } ac = b^2$$

در این حالت عدد b را واسطه هندسی دو عدد a و c می گویند.

مثال: واسطه هندسی اعداد $\sqrt{\frac{3}{4}}$ و $\sqrt{3}$ را بدست آورید.

نکته: هرگاه بین دو عدد a و b ، m واسطه هندسی درج کنیم (قرار دهیم) ، قدر نسبت دنباله تشکیل شده از روابط زیر بدست می آید :

$$\begin{cases} q = \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} & \text{اگر } (m+1) \text{ فرد باشد،} \\ q = \pm \sqrt[m+1]{\frac{b}{a}} & \text{اگر } (m+1) \text{ زوج باشد،} \end{cases}$$

مثال: بین دو عدد ۳ و ۴۸ ، سه واسطه هندسی درج کنید ، آیا جواب یکتا است؟

مجموع جملات دنباله هندسی

در هر دنباله هندسی مجموع n جمله اول دنباله با قدر نسبت q و جمله اول a از رابطه زیر بدست می آید :

$$S_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q} \quad \text{یا} \quad S_n = a(1 + q + q^2 + \dots + q^{n-1}) \quad , \quad (q \neq 1)$$

مثال : مجموع چند جمله اول دنباله هندسی ... ، 108 ، 36 ، 12 ، 4 برابر 1456 می شود؟

مثال : جمله عمومی یک دنباله هندسی به صورت $a_n = 2^{n-1}$ است. چند جمله از این دنباله ها را با هم جمع کنیم تا حاصل مجموع آنها ۲۵۵ شود؟

مثال : طول ضلع مربعی یک متر است، ابتدا نیمی از مساحت مربع را رنگ می کنیم. سپس نیمی از مساحت باقی مانده را و به همین ترتیب در هر مرحله نیمی از مساحت باقی مانده از قبل را رنگ می کنیم. پس از دست کم چند مرحله حداقل ۹۹ درصد سطح مربع رنگ شده است؟

نکته مهم: در یک دنباله هندسی اگر مجموع $2n$ جمله اول دنباله (یعنی S_{2n}) و مجموع n جمله اول دنباله (یعنی S_n) را داشته باشیم، آنگاه می توان قدر نسبت (q) را از طریق فرمول زیر محاسبه کرد:

$$\frac{S_{2n}}{S_n} = 1 + q^n$$

مثال: در یک دنباله هندسی مجموع سه جمله اول برابر ۱۱۲ و مجموع شش جمله اول برابر ۱۲۶ است، قدر نسبت این دنباله هندسی را بدست آورید.

نکته مهم: اگر $|q| < 1$ باشد و تعداد جملات دنباله هندسی نامتناهی (نامحدود) باشد، آنها مجموع تمامی جملات دنباله که به آن **حد مجموع** گفته می شود از رابطه زیر بدست می آید:

$$S_{\infty} = S = \frac{a}{1 - q}$$

❖ در فرمول روبرو، a جمله اول و q قدر نسبت می باشد.

❖ S_{∞} : مجموع تمامی جملات دنباله هندسی یا

حد مجموع می باشد.

مثال: حاصل تقریبی جمع $1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \frac{1}{16} + \dots$ را بدست آورید.