

دنباله حسابی (تصاعد عددی) :

$$\{a, a+d, a+2d, a+3d, \dots\}$$



$$a_1 \quad a_2 \quad a_3$$

جمله
سوم

جمله عمومی (جمله n ام) دنباله حسابی

$$a_1 = a + 1d, a_2 = a + 2d, \dots \Rightarrow a_n = a + (n-1)d \Rightarrow a_n = d_n + a - d \Rightarrow$$

$$\begin{cases} d > 0 \Rightarrow \text{صعودی} \\ d < 0 \Rightarrow \text{نزولی} \\ d = 0 \Rightarrow \text{ثابت} \end{cases}$$

دنباله حسابی درجه ۱ خطی است و ضریب n همان قدر نسبت است.

* مجموع جملات دنباله های حسابی :

$$\text{مجموع } n \text{ جمله دنباله حسابی} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{جمله اول} + \text{جمله آخر})}{2} \quad 1+2+3+\dots+n = \frac{n(n+1)}{2}$$

$$\textcircled{1} S_n = \frac{n(a_1 + a_n)}{2} \xrightarrow{a_n = a + (n-1)d} \textcircled{2} S_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$$

$s_n = An^2 + Bn$ درجه ۲

$\textcircled{3}$ مجموع تعداد جملات متوالی (فرد) = جمله وسط \times تعداد

(s_n در n^2 ضریب) $d = 2 \times$ قدر نسبت

$\textcircled{4}$ مجموع تعداد جملات متوالی (زوج) = میانگین دو جمله وسط \times تعداد = $\frac{a_m + a_{m+1}}{2} \times$ تعداد

مثال ۱ : مجموع جملات هفتم و هشتم یک دنباله حسابی برابر ۱۱ است مجموع ۱۴ جمله اول آن کدام است؟

$$\text{روش اول} \begin{cases} a_7 + a_8 = a + 6d + a + 7d = 2a + 13d = 11 \\ s_{14} = ? \quad s_{14} = \frac{14(2a + 13d)}{2} = 7(2a + 13d) = 7 \times 11 = 77 \end{cases}$$

روش دوم : $a_1, a_2, \dots, a_6, a_7, a_8, \dots, a_{14} \Rightarrow s_{14} = 14 \times \frac{a_7 + a_8}{2} = 7 \times 11 = 77$

مثال ۲: مجموع سه جمله پنجم یک دنباله حسابی برابر ۸۰ است جمله سیزدهم دنباله کدام است؟

$$\text{حل) } a_{11} + a_{12} + \underline{a_{13}} + a_{14} + a_{15} = 5 \times a_{13} = 80 \Rightarrow a_{13} = \frac{80}{5} = 16$$

جمله وسطی

مثال ۳: در یک دنباله حسابی جمله n ام به صورت $a_n = \frac{7-3n}{2}$ است. مجموع هفده جمله اول دنباله کدام است؟

$$\text{حل روش اول) } \begin{cases} n=1 \\ a_1 = \frac{7-3}{2} = \frac{4}{2} = 2 \\ d = a_2 - a_1 \rightarrow d = -\frac{3}{2} \end{cases} \Rightarrow s_n = \frac{n(2a + (n-1)d)}{2}$$

$$s_{17} = \frac{17(4 + 16 \times -\frac{3}{2})}{2} = \frac{17(4 - 24)}{2} = -170$$

$$\text{روش دوم) } s_{17} = \frac{17(a_1 + a_{17})}{2} = \frac{17(2 - 22)}{2} = \frac{17 \times -20}{2} = -170$$

$$\begin{cases} n = 1 \rightarrow a_1 = 2 \\ n = 17 \rightarrow a_{17} = \frac{7-51}{2} = -22 \end{cases}$$

$$\text{تذکر: } a_1 + a_{11} + \dots + a_{17} = \frac{\text{تعداد} \times (\text{اولی} + \text{آخری})}{2} = \frac{11 \times (a_1 + a_{17})}{2}$$

مثال ۳: مجموع n جمله اول یک دنباله حسابی به صورت $s_n = 3n^2 - 7n$ است جمله دوازدهم دنباله کدام است؟

$$s_n - s_{n-1} = a_n \Rightarrow \begin{cases} s_{12} = 3(12)^2 - 7 \times 12 = 432 - 84 = +348 \\ s_{11} = 3(11)^2 - 7 \times 11 = 363 - 77 = +286 \end{cases}$$

$$a_{12} = 348 - 286 \Rightarrow a_{12} = 62$$

$$\begin{cases} n = 1 \Rightarrow a_1 = s_1 = 3 - 7 = -4 \\ d = 2 \times (n^2 \text{ ضریب }) = 2 \times 3 = 6 \end{cases}$$

در s_n

مثال ۴: در یک دنباله حسابی مجموع بیست جمله اول سه برابر مجموع دوازده جمله اول است. اگر جمله سوم برابر ۶ باشد. جمله دهم کدام است؟

$$\begin{cases} s_{20} = 3s_{12} \Rightarrow \frac{20}{2}(2a + 19d) = 3 \times \frac{12}{2}(2a + 11d) \Rightarrow \\ a_3 = 6 \Rightarrow a + 2d = 6 \Rightarrow 1 \times (2a + 19d) = 1 \times (2a + 11d) \Rightarrow \\ \textcircled{I} \quad 10a + 95d = 18a + 99d \Rightarrow 8a + 4d = 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} d = 4, a = -2 \leftarrow -3a = 6 \leftarrow a - 4a = 6 \leftarrow d = -2a \leftarrow 2a + d = 0 \\ \textcircled{I} \text{ در} \\ a_{10} = a + 9d = -2 + 36 = 34 \end{aligned}$$

مثال ۵: در یک دنباله حسابی مجموع n جمله نخست $s_n = \frac{n(n-15)}{6}$ است. در این دنباله مجموع جملات با شروع از جمله هفتم و ختم به جمله هجدهم کدام است؟

$$\text{مجموع} = \frac{(\text{آخر} + \text{اول}) \times \text{تعداد}}{2} \Rightarrow 12 = \frac{18 - 7 + 1}{2} \Rightarrow \text{تعداد} = 12 \text{ (روش اول حل)}$$

$$\Rightarrow \text{مجموع} = \frac{12}{2}(a_7 + a_{18}) = 6(a + 6d + a + 17d) = 6(2a + 23d) = 12a + 138d$$

$$\begin{aligned} a_1 = s_1 = -\frac{14}{6} = -\frac{7}{3} \\ d = 2 \times \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \end{aligned} \rightarrow \text{مجموع} = 12 \times -\frac{7}{3} + 138 \times \frac{1}{3} = -28 + 46 = 18$$

$$\text{روش دوم} \quad a_7 + a_8 + \dots + a_{18} = s_{18} - s_6 = 9 - (-9) = 18$$

$$\begin{cases} s_{18} = \frac{18 \times 3}{6} = 9 \\ s_6 = \frac{6 \times -9}{6} = -9 \end{cases}$$

مثال ۶: مجموع همه اعداد طبیعی کوچکتر از ۱۰۰۰ که باقیمانده تقسیم آنها بر ۷ برابر ۲ است کدام است؟

حل) $\{2, 9, 16, \dots, 996\}$

$d=7$ قدر نسبت مقسوم علیه جمله اول همان باقیمانده

$$\text{تعداد} = \frac{\text{اولی} - \text{آخری}}{\text{قدر نسبت}} + 1 = \frac{996 - 2}{7} + 1 = \frac{994}{7} + 1 = 143$$

$$\text{مجموع جملات} = \frac{\text{تعداد} (\text{اولی} + \text{آخری})}{2} = \frac{143 \times (2 + 996)}{2} = \frac{143 \times 998}{2} = 71357$$

مثال ۷: مجموع اعداد سه رقمی مضرب ۷ (بخش پذیر بر ۷) کدام است؟

$$\begin{array}{r} 100 \overline{) 7} \\ 7 \quad 14 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 2 \end{array}$$

$$\Rightarrow \{105, 112, \dots, 994\}$$

$$\text{تعداد} = \frac{994 - 105}{7} + 1 = 128$$

باقیمانده = ۰

$$\begin{array}{r} 1000 \overline{) 7} \\ 7 \quad 142 \\ \hline 30 \\ 28 \\ \hline 20 \\ 14 \\ \hline 6 \end{array}$$

باقیمانده = ۰

$$\text{مجموع} = \frac{\text{تعداد} (\text{اولی} + \text{آخری})}{2} = \frac{128(105 + 994)}{2} = 64 \times 1099 = 70336$$

مثال ۸: در دنباله حسابی نزولی $2x - 47, x, x - 3$ مجموع جملات مثبت دنباله کدام است؟

حل) $2b = a + c \Rightarrow 2x = 3x - 50 \Rightarrow x = 50 \Rightarrow \{53, 50, 47, \dots\}$

$$\Rightarrow a_n = a + (n - 1)d \Rightarrow a_n = -3n + 56 \quad a = 53, d = -3$$

$$\Rightarrow a_n > 0 \Rightarrow -3n + 56 > 0 \Rightarrow -3n > -56 \Rightarrow n < \frac{56}{3} = 18.66 \Rightarrow 1 \leq n \leq 18$$

$$\Rightarrow s_{18} = \frac{18}{2} (2 \times 53 + 17 \times -3) = 9(106 - 51) = 9 \times 55 = 495$$

مثال ۹: در یک دنباله حسابی جمله پنجم -19 و جمله دهم 31 است. مجموع بیست جمله اول دنباله کدام است؟

روش اول $\begin{cases} a_5 = -19 \\ a_{10} = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} a + 4d = -19 \\ a + 9d = 31 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -a - 4d = 19 \\ a + 9d = 31 \end{cases} \Rightarrow 5d = 50 \Rightarrow d = 10$

روش دوم $d = \frac{a_{10} - a_5}{10 - 5} = \frac{31 - (-19)}{5} = \frac{50}{5} = 10$ $\xrightarrow{a_5 = a + 4d = -19} a + 40 = -19 \rightarrow a = -59$

$$\Rightarrow s_{20} = \frac{20}{2} (-108 + 19 \times 10) = 10 \times 82 = 820$$

مثال ۱۰: در یک دنباله حسابی جمله اول -2 و مجموع پنج جمله اول آن، یک سوم مجموع پنج جمله بعدی است. جمله بیست و یکم دنباله کدام است؟

مثال ۱۱: جملات مشترک دنباله های حسابی $\{-1, 5, 11, \dots\}$ ، $\{3, 7, 11, 15, \dots\}$ تشکیل یک دنباله حسابی

جدید می دهند مجموع یازده جمله اول دنباله جدید کدام است؟

حل \Rightarrow دنباله جدید $\begin{cases} a_1 = 11 \\ d = d_1, d_2 \end{cases}$ ک.م.م $\Rightarrow (6, 4)$ ک.م.م $\Rightarrow d = 12$

$$s_{11} = \frac{11}{2} (2a + 10d) = \frac{11}{2} \times (22 + 120) = \frac{11}{2} \times 142 = 781$$

مثال ۱۲: در یک دنباله حسابی نزولی با ۲۰ جمله، مجموع سه جمله آخر ۱۵ و حاصل ضرب آنها ۱۰۵ است. مجموع کل جملات دنباله کدام است؟

$$\begin{cases} (x-d) + x + (x+d) = 3x = 15 \Rightarrow x = 5 \\ x(x^2 - d^2) = 5(25 - d^2) = 105 \Rightarrow 25 - d^2 = \frac{105}{5} = 21 \Rightarrow d^2 = 4 \\ \Rightarrow d = \pm 2 \xrightarrow{\text{نزولی}} d = -2 \Rightarrow \{\dots, 7, 5, 3\} \end{cases}$$

فرض کنیم جمله اول برابر ۳ است و $d = +2$ و مجموع بیست جمله اول را می‌خواهیم.

$$\{3, 5, 7, \dots\} \Rightarrow s_{20} = \frac{20}{2} (6 + 19 \times 2) = 10 \times (6 + 38) = 440$$

نکته: اگر S_n مجموع n جمله اول از یک دنباله حسابی با جمله اول a و قدر نسبت d باشند آنگاه:

$$S_n - 2S_{n-1} + S_{n-2} = d$$

مثال ۱۳: بین اعداد ۱۲- و ۵۸، سیزده واسطه حسابی به گونه‌ای درج کرده ایم که این پانزده عدد تشکیل دنباله حسابی بدهند، مجموع این ۱۵ عدد کدام است؟

$$\begin{array}{c} a_1 \quad a_{15} \\ \downarrow \quad \downarrow \\ -12, \dots, 58 \end{array} \Rightarrow d = \frac{a_{15} - a_1}{15 - 1} = \frac{58 - (-12)}{14} = \frac{70}{14} = 5 \Rightarrow s_{15} = \frac{15}{2} (-12 + 58) = \frac{15}{2} \times 46 = 15 \times 23 = 345$$

مثال ۱۴: در یک دنباله حسابی با ۳۰ جمله، مجموع جملات با شماره زوج ۲۶۰ و مجموع جملات با شماره فرد ۲۰۰ است، قدر نسبت دنباله کدام است؟

$$\begin{cases} a_2 + a_4 + \dots + a_{30} = 260 \\ a_1 + a_3 + \dots + a_{29} = 200 \end{cases} \xrightarrow[\substack{\text{از هم کم شوند} \\ a_2 - a_1 = d \\ a_4 - a_3 = d}]{\text{}} d + d + \dots + d =$$

$$15d = 60 \Rightarrow d = 4$$

نکته: در یک دنباله حسابی با تعداد جملات زوج: $S_{ع} = \frac{n}{2}d$ فرد

مثال ۱۵: ده عدد متوالی جملات یک دنباله حسابی اند. مجموع ۵ جمله اول ۵۵ و مجموع ۵ جمله آخر ۱۳۰ است. کوچکترین این اعداد کدام است؟

دنباله صعودی است

$$\begin{cases} a_1 + a_2 + \dots + a_5 = 5 \times a_3 = 5(a + 2d) = 5a + 10d = 55 \\ a_6 + a_7 + a_8 + a_9 + a_{10} = 5 \times a_8 = 5 \times (a + 7d) = 5a + 35d = 130 \end{cases}$$

کوچکترین جمله $= a_1 = ?$

$$\Rightarrow \begin{cases} a + 2d = 11 \\ a + 7d = 26 \end{cases} \xrightarrow{-} \begin{cases} a + 2d = 11 \\ -5d = -15 \end{cases} \Rightarrow d = 3, a = 5$$

دنباله هندسی:

$$\{a, aq, aq^2, aq^3, \dots\} \Rightarrow a_n = aq^{n-1} \Rightarrow a_n = a_m q^{n-m} \Rightarrow \frac{a_n}{a_m} = q^{n-m}$$

مثال $\frac{a_5}{a_3} = q^2 \rightarrow \frac{aq^4}{aq^2} = q^2$

هندسی $a, b, c \rightarrow b^2 = ac \Rightarrow$ واسطه هندسی دو عدد $= \sqrt{xy}$

حاصل ضرب آنها $= \sqrt[n]{\dots}$ واسطه هندسی چند عدد

(نکته)

{	$q > 0 \Rightarrow$	دنباله یکنوا	$q > 1 \xrightarrow{\text{منطبق با علامت جملات}}$	جملات مثبت	$q > 1 \Rightarrow$	صعودی
				جملات منفی	$q > 1 \Rightarrow$	نزولی
				$0 < q < 1 \xrightarrow{\text{غیر منطبق با علامت جملات}}$		
			ناهماهنگ	جملات منفی	$0 < q < 1 \Rightarrow$	صعودی

نکته) مجموع n جمله اول هندسی $s_n = \frac{a(q^n - 1)}{q - 1}$ یا $s_n = \frac{a(1 - q^n)}{1 - q}$

نکته) $\frac{s_{2n}}{s_n} = q^n + 1$

معمولاً برای وقتی $q < 1$ باشد

نکته) $|q| < 1 \Rightarrow \lim_{n \rightarrow +\infty} s_n = s_\infty = \frac{a}{1 - q}$ جمله اول
قدر نسبت $1 - q$
 حد مجموع جملات (مجموع همه جملات)

تذکر: اگر دو دسته اطلاعات هندسی داده شده باشد می توان با تشکیل یک دستگاه و حل آن با تقسیم کردن (نه حذفی) آن را حل کرد و a و q بدست آورد.

تذکر: اگر یک دسته اطلاعات داده شده باشد می توان رابطه ای بین a و q بدست آورد و خواسته مسئله را در آن رابطه جستجو کرد.

مجموع جملات با شماره های زوج \Rightarrow $\frac{\text{مجموع جملات با شماره های فرد}}{\text{مجموع جملات با شماره های زوج}} = q$

مثال ۱۶: به ازای یک مقدار x ، اعداد $x^2 + 4, 2x, x^2 - 2$ به ترتیب سه جمله اول از یک دنباله هندسی نزولی اند. مجموع هفت جمله اول دنباله کدام است؟ (سراسری ۹۳ تجربی)

$$b^2 = ac \Rightarrow 4x^2 = (x^2 - 2)(x^2 + 4) = x^4 + 2x^2 - 8 \Rightarrow x^4 - 2x^2 - 8 = 0$$

$$x^2 = t \Rightarrow (t - 4)(t + 2) = 0 \Rightarrow t - 4 = 0 \Rightarrow t = 4 \Rightarrow x = \pm 2$$

از راست به چپ نزولی $\{8, 4, 2, \dots\}$

غیر یکنوا $q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

$$\Rightarrow s_7 = \frac{a(1 - q^7)}{1 - q} = \frac{8(1 - \frac{1}{128})}{1 - \frac{1}{2}} = 16 \times \frac{127}{128} = 2^4 \times \frac{127}{2^7} = \frac{128}{8}$$

مثال ۱۷: در مثال قبل حد مجموع جملات (همه جملات) کدام است؟

$$s_{\infty} = \frac{a}{1-q} = \frac{8}{1-\frac{1}{2}} = 16$$

مثال ۱۸: در دنباله هندسی غیر نزولی $\{2x, x+3, x, \dots\}$ ، مجموع دوازده جمله اول چند برابر مجموع ۶ جمله اول دنباله است؟

حل) $b^2 = ac \Rightarrow$ وقت گیر $\Rightarrow \begin{cases} a_3 = x \\ a_1 = 2x \end{cases} \Rightarrow \frac{a_3}{a_1} = q^2 = \frac{x}{2x} = \frac{1}{2}$

$\Rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$ غیر نزولی نوسانی $\Rightarrow q = -\frac{\sqrt{2}}{2}$ یا $q = -\frac{1}{\sqrt{2}}$

طبق نکته $\Rightarrow \frac{s_{12}}{s_6} = q^6 + 1 = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)^6 + 1 = \frac{+1}{8} + 1 = \frac{9}{8}$

مثال ۱۹: در یک دنباله هندسی مجموع شش جمله اول دنباله برابر ۹۹ و مجموع سه جمله اول دنباله برابر ۱۱ است ، جمله هفتم دنباله کدام است؟

یعنی مجموع شش جمله اول ۹ برابر $\Rightarrow \frac{s_6}{s_3} = \frac{99}{11} = 9 \Rightarrow q^3 + 1 = 9 \Rightarrow q = 2$

مجموع سه جمله اول است. $\Rightarrow s_3 = a_1 + a_2 + a_3 = a + aq + aq^2 = a(1+q+q^2) \xrightarrow{q=2} 7a = 11 \rightarrow a = \frac{11}{7}$

$\Rightarrow a_7 = aq^6 = \frac{11}{7} \times 2^6 = \frac{11 \times 64}{7} = \frac{704}{7}$

مثال ۲۰: تعداد جملات یک دنباله هندسی عدد زوج است . اگر مجموع تمام جملات آن ۳ برابر مجموع جملات با ردیف فرد باشد ، قدر نسبت آن کدام است؟ (ریاضی ۹۴)

- ۱) $\frac{1}{3}$ ۲) $\frac{1}{2}$ ۳) ۲ ۴) ۳

مثال ۲۱: در یک دنباله هندسی، مجموع جملات اول و سوم برابر ۱ و مجموع چهار جمله اول آن ۳ می باشد. مجموع شش جمله اول آن کدام است؟

حل)
$$\begin{cases} a_1 + a_3 = 1 \Rightarrow \begin{cases} a + aq^2 = 1 \\ a + aq + aq^2 + aq^3 = 3 \Rightarrow 1 + q(a + aq^2) = 3 \end{cases} \\ a_1 + a_2 + a_3 + a_4 = 3 \end{cases}$$

$$\Rightarrow 1 + q = 3 \Rightarrow q = 2 \xrightarrow{a(1+q^2)=1} a = \frac{1}{5} \Rightarrow s_6 = \frac{a(q^6 - 1)}{q - 1}$$

$$s_6 = \frac{\frac{1}{5} \times 63}{1} = \frac{63}{5}$$

مثال ۲۲: میانگین هندسی ریشه های معادله درجه دوم $2x^2 - 5x + 24 = 0$ کدام است؟

حل) میانگین هندسی $= \sqrt{\alpha\beta} = \sqrt{\frac{c}{a}} = \sqrt{2} = 2\sqrt{3}$

میانگین حسابی $= \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{-\frac{b}{a}}{2} = -\frac{b}{2a} = +\frac{5}{4}$

مثال ۲۳: اگر $\text{Log}_2^x, \text{Log}_2^y, \text{Log}_2^z$ به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله حسابی با قدر نسبت ۳ باشند

آنگاه x, y, z سه جمله متوالی یک دنباله با قدر نسبت هستند.

$$2\text{Log}_2^y = \text{Log}_2^x + \text{Log}_2^z \Rightarrow \text{Log}_2^{y^2} = \text{Log}_2^{xz} \Rightarrow \boxed{y^2 = xz}$$

$$d = \text{Log}_2^y - \text{Log}_2^x = 3 \Rightarrow \text{Log}_2^{\frac{y}{x}} = 3 \Rightarrow q = \frac{y}{x} = 2^3 = 8$$

مثال ۲۴: جملات سوم، ششم و هشتم یک دنباله حسابی (غیر ثابت) به ترتیب سه جمله متوالی یک دنباله هندسی

هستند :

الف) قدر نسبت دنباله هندسی کدام است؟

ب) جمله چندم دنباله حسابی صفر است .

روش اول : $(a + 2d), (a + 5d), (a + 7d) \xrightarrow{\text{هندسی}} (a + 5d)^2 = (a + 2d)(a + 7d)$

$$\Rightarrow a^2 + 10ad + 25d^2 = a^2 + 9ad + 14d^2 \Rightarrow ad + 11d^2 = 0 \Rightarrow d(a + 11d) = 0$$

$$\xrightarrow{d \neq 0} a + 11d = 0 \xrightarrow{(a_{12}=0 \text{ جواب قسمت ب})} a = -11d \Rightarrow q = \frac{a + 5d}{a + 2d}$$

$$\Rightarrow q = \frac{-11d + 5d}{-11d + 2d} = \frac{-6}{-9} = +\frac{2}{3} \rightarrow q = \frac{2}{3}$$

روش دوم

$$\begin{cases} a_3, a_6, a_8 \\ \downarrow \quad \downarrow \quad \downarrow \\ x \quad xq \quad xq^2 \end{cases} \xrightarrow{\text{تفاضلات}} \begin{cases} xq - x = a_6 - a_3 = 3d \\ xq^2 - xq = a_8 - a_6 = 2d \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x(q-1) = 3d \text{ ①} \\ xq(q-1) = 2d \text{ ②} \end{cases} \xrightarrow{\text{حسابی}} \frac{xq(q-1)}{x(q-1)} = \frac{3}{2} \rightarrow q = \frac{3}{2}$$

الف) $\Rightarrow q = \frac{2}{3}$ سوم، ششم، هشتم (روش سوم) ب) $q = \frac{a + 5d}{a + 2d} = \frac{2}{3}$

$$\Rightarrow 3a + 15d = 2a + 4d \Rightarrow a + 11d = 0 \Rightarrow a_{12} = 0$$

مثال ۲۵: حاصل $1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \frac{1}{5} - \frac{1}{6} + \dots$ کدام است؟

حل) $(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{9} + \dots) - (\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots) = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}$

$$s_{\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = \frac{3}{2} \qquad s_{\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{2}} = 2$$

مثال ۲۶: اگر $|x| < 1$ حاصل معادله $1 - x + x^2 - x^3 + \dots = 2$ کدام است؟

$$\text{حد مجموع جملات سمت چپ} \Rightarrow \text{هندسی با } q = -x \text{ سمت چپ (حل)} = \frac{1}{1 - (-x)} = \frac{1}{1+x} = 2 \rightarrow x+1 = \frac{1}{2} \rightarrow x = -\frac{1}{2}$$

چپ $a = 1$ است

مثال ۲۷: در یک دنباله هندسی هر جمله برابر حد مجموع تمامی جملات بعد از آن جمله است قدر نسبت دنباله کدام است؟

$$\text{حل) } a_n = \frac{a_n + 1}{1 - q} \Rightarrow a_n = \frac{a_n q}{1 - q} \Rightarrow \frac{q}{1 - q} = 1 \Rightarrow q = 1 - q \Rightarrow 2q = 1 \Rightarrow q = \frac{1}{2}$$

مثال ۲۸: در دنباله هندسی $a_n = 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^{2n-1}$ ، مجموع پنج جمله اول دنباله کدام است؟

$$\begin{cases} a_1 = 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^{2-1} = -\frac{3}{2} \\ a_2 = 3 \left(-\frac{1}{2} \right)^{2} = -\frac{3}{4} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{a_2}{a_1} = \frac{-\frac{3}{4}}{-\frac{3}{2}} = +\frac{1}{2} \text{ یا } q = \left(\text{ضریب پایه ظاهری} \right)^2 = \left(-\frac{1}{2} \right)^2 = \frac{1}{4}$$

$$s_5 = \frac{a(1 - q^5)}{1 - q} = \frac{-\frac{3}{2} \left(1 - \frac{1}{4^5} \right)}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{-\frac{3}{2} \times \left(1 - \frac{1}{1024} \right)}{+\frac{3}{4}} = -2 \times \frac{1023}{1024} = -\frac{1023}{512}$$

مثال ۲۹: در مثال بالا مجموع ۱۰ جمله اول چند برابر مجموع ۵ جمله اول است؟

$$\frac{s_{10}}{s_5} = q^5 + 1 = \left(\frac{1}{4} \right)^5 + 1 = 1024 + 1 = 1025$$

در مثال بالا حد مجموع همه جملات از جمله پنجم تا آخر کدام است؟

$$s_{\infty} = \frac{a_5}{1 - q} = \frac{3 \times \left(-\frac{1}{2} \right)^9}{1 - \frac{1}{4}} = \frac{3 \left(-\frac{1}{2} \right)^9}{\frac{3}{4}} = 4 \times -\frac{1}{2^9} = -\frac{1}{2^7} = -\frac{1}{128}$$

مثال ۳۰: در یک دنباله هر جمله نسبت به جمله قبل آن ۲۰٪ افزایش یافته است این دنباله با قدر نسبت است .

$$a_r = a_1 + \frac{20}{100} a_1 = (1 + 0.2) a_1 \Rightarrow a_r = 1.2 a_1 \Rightarrow q = 1.2 \quad \text{هندسی}$$

$$\text{هندسی} \quad x \% \text{ افزایش (نکته)} \Rightarrow q = 1 + \frac{x}{100}$$

$$\text{هندسی} \quad x \% \text{ کاهش} \Rightarrow q = 1 - \frac{x}{100}$$

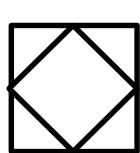
مثال ۳۱: توپی را از ارتفاع ۱۰ متری زمین رها می کنیم اگر در هر بار با برخورد با زمین ۲۰٪ از ارتفاع آن کم شود . کل مسافتی که توپ حل می کند تا متوقف شود تقریباً کدام است؟

$$10 + 8 + 8 + 6.4 + 6.4 + \dots = ?$$

$$\begin{cases} a = 10 \\ q = 0.8 \end{cases} \Rightarrow s_{\infty} = \frac{10}{1 - 0.8} = \frac{10}{0.2} = \frac{100}{2} = 50 \xrightarrow{\times 2} 100 \xrightarrow{-10} 90m$$

برای اولین حرکت یک ۱۰ داریم .

مثال ۳۲: مطابق شکل وسط اضلاع مربعی به ضلع واحد را به هم وصل می کنیم حد مجموع مساحت همه مربع های به وجود آمده کدام است؟



طول ضلع

$$\Rightarrow \begin{cases} a_1 = 1 \\ a_r = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{\frac{1}{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \end{cases} \Rightarrow q = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

طول ضلع دوم در مرحله دوم

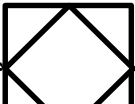
نکته: ضلع $q=q$ محیط

ضلع $q = q^2$ مساحت

$$q = \frac{1}{\sqrt{2}}, a_1 = 1 \times 1 = 1$$

$$s_{\infty} = \frac{1}{1 - \frac{1}{\sqrt{2}}} = 2$$

نکته: اگر وسط های اضلاع یک n ضلعی منتظم را به هم وصل کنیم: $q = \cos \frac{\pi}{n}$ ضلع


 \rightarrow ضلع $q = \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}}{2} = \frac{1}{\sqrt{2}}$


 \rightarrow $q = \cos \frac{\pi}{3} = \frac{1}{2} \rightarrow q = \frac{1}{2}$ محیط متساوی الاضلاع

مساحت $q = \frac{1}{4}$

مجموع همه محیط ها = $\frac{\text{محیط اولیه}}{1 - q}$

مجموع همه مساحت ها = $\frac{\text{مساحت اولیه}}{1 - q}$

نکته خیلی مهم: معمولاً مسائل اشکال چند مرحله ای یک دنباله هندسی هستند که کافی است. جمله اول و دوم را بیابیم

تا $q = \frac{a_2}{a_1}$ بدست آید سپس $s_\infty = \frac{q}{1 - q}$ نیز بدست آید.