



تابع

فصل سوم

مفهوم تابع ۱ درس

ضابطهٔ جبری تابع ۲ درس

نمودار تابع خطی ۳ درس

نمودار تابع درجه ۲ ۴ درس



نمودار ساعتی که خورشید نسبت به مشهد در جهت قبله قرار می‌گیرد.



یکی از شیوه‌های جهت‌یابی قبله استفاده از سایهٔ شاخص، هنگام قرار گرفتن خورشید در راستای قبله است. در هر منطقه با تعیین ساعت دقیقی که خورشید در جهت قبله قرار می‌گیرد می‌توان با دقت بسیار بالایی جهت قبله در آن منطقه را تعیین کرد.



درس ۱

مفهوم تابع

سال گذشته در فصل خط و معادله‌های خطی با مثال دوچرخه‌سوار، رابطه‌ای را بین زمان و مسافت طی شده تعریف کردیم.

در مثال مذکور، دوچرخه‌سوار با سرعت ثابت ۲ متر در ثانیه در حال حرکت است؛ یعنی در هر ثانیه ۲ متر را طی می‌کند. جدول زیر رابطه بین زمان (t) و مسافت طی شده (d) را نشان می‌دهد: (جدول را کامل کنید)

زمان بر حسب ثانیه (t)	۰	۱	۲	۲/۵	...	۴/۵	۵
مسافت طی شده بر حسب متر (d)	۰	۲	...	۵	۸	۹	...

همان‌طور که مشاهده می‌کنید، در این مثال متغیر زمان (t) به صورت مستقل تغییر کرده و متغیر مسافت (d) بر اساس تغییرات t تغییر می‌کند و در واقع تغییرات متغیر d تابعی از تغییرات متغیر t است. این رابطه که می‌توان آن را به صورت جبری و به شکل $d=2t$ نمایش داد، رابطه‌ای خطی نامیده شد. در حالت کلی رابطه‌هایی به صورت $y=ax+b$ ، را رابطه‌های خطی نامیدیم.

این رابطه‌ها که نمودار آنها یک خط است، در واقع ارتباط مشخصی بین x و y نقاطی است که روی این خط قرار دارند. به عنوان مثال اگر فرض کنیم $y=2x+1$ معادله یا ضابطه یک خط باشد، مختصات هر نقطه که در این معادله صدق کند به این معناست که آن نقطه روی این خط واقع است و بالعکس اگر نقطه‌ای روی این خط واقع باشد، باید مختصات آن نقطه در معادله $y=2x+1$ صدق کند. همان‌طور که مشاهده می‌کنید عرض هر نقطه روی این خط یعنی y، مساوی است با دو برابر طول همان نقطه به علاوه ۱ یعنی $(2x+1)$ ؛ بنابراین رابطه بین x و y کاملاً معین است در جدول‌های زیر مختصات چند نقطه و رابطه بین x و y آنها بر اساس ضابطه داده شده، آمده است: (جاهای خالی را پر کنید)

x	۱	۵	۳	...	$\frac{1}{2}$	۰	...
y	۱	-۷	...	۳	۰

$$y = -2x + 3$$



او که مبنای جهان، «زوج» آفرید خود به ما نزدیک‌تر شد از وَرید «تابعی» را از زمین تا آسمان کرده در دل‌های انسان‌ها، نهان تابع منظور ما، «پیوسته» است «حد»، به آمیالی دل ما بسته است دل به بالا تا عنایت می‌کند حدّ تابع، «بی‌نهایت» می‌کند هر کسی تا بی‌نهایت را شناخت چون «مُجانب» سوی آن بالا شناخت



x	۱	۲	...	۰	-۱
y	۲	...	$\frac{۵}{۴}$

$$y = x^2 + 1$$

در محیط اطراف خودمان و در جهان طبیعت نیز پدیده‌هایی می‌توان یافت که در آنها ارتباط خاصی بین دو متغیر وجود دارد.

به عنوان مثالی از این رابطه‌ها می‌توان به رابطه بین قد و وزن افراد اشاره کرد. یکی از روش‌های متداول برای اندازه‌گیری وزن مطلوب در افراد، استفاده از نمایه توده بدنی یا نماتوب (BMI) است که طبق رابطه زیر محاسبه می‌شود:

$$\text{نماتوب} = \frac{\text{وزن برحسب کیلوگرم}}{\text{مجدور طول قد برحسب متر}}$$

با استفاده از این رابطه، برای هر فرد نماتوب محاسبه می‌شود که بر اساس این شاخص و به صورت زیر نسبت به عدد حاصل نتیجه‌گیری می‌شود.

الف) شخص لاغر است و کمبود وزن دارد \Rightarrow $19 < \text{نماتوب}$

ب) شخص وزن طبیعی دارد و در محدوده سلامت وزنی است \Rightarrow $19 \leq \text{نماتوب} \leq 25$

پ) شخص اضافه وزن دارد \Rightarrow $30 < \text{نماتوب} \leq 25$

ت) شخص چاق است و وضعیت بحرانی دارد \Rightarrow $30 \geq \text{نماتوب}$

گروه سنی	نماتوب
۱۹-۲۴	۲۲
۲۵-۳۴	۲۳
۳۵-۴۴	۲۴
۴۵-۵۴	۲۵
۵۵-۶۴	۲۶
۶۵ به بالا	۲۷

البته وزن مطلوب با سن هر شخص رابطه مستقیم دارد، زیرا با افزایش سن به طور طبیعی میزان چربی ذخیره‌ای بدن بالا رفته و نماتوب افزایش می‌یابد. متخصصان علوم تغذیه با توجه به سن افراد مطابق جدول روبه‌رو نماتوب مناسب افراد مختلف را تعیین می‌کنند.

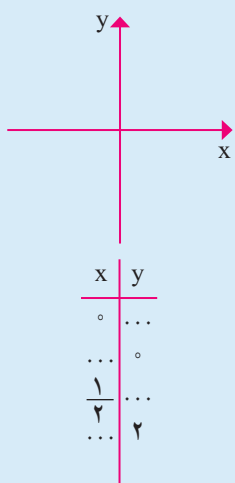
پس از یافتن نماتوب متناسب با گروه سنی، هر فرد می‌تواند وزن مطلوب خود را از فرمول زیر به دست آورد:

$$\text{توان دوم یا مربع قد برحسب متر} \times \text{نماتوب} = \text{وزن مطلوب برحسب کیلوگرم}$$

با دقت در رابطه یا تساوی فوق تشخیص می‌دهید که وزن مطلوب، تابعی از طول قد هر فرد است (بستگی به طول قد دارد) و نیز درمی‌یابید که وزن مطلوب به نماتوب نیز بستگی دارد. در فرمول فوق



نمودار خط $y=4x-2$ را روی محورهای زیر رسم کرده و جدول داده شده را کامل کنید:



طول قد و نماتوب متغیرهایی هستند که وزن مطلوب، متغیری است که وابسته به این دو متغیر است. آیا می‌توانید با توجه به جدول قبل اگر فردی در گروه سنی ۵۴-۴۵ قرار داشته باشد و طول قد این فرد ۱۸۹ سانتی متر باشد، وزن مطلوب برای این شخص را تعیین کنید؟



فعالیت

می‌دانیم مساحت دایره از تساوی $S = \pi \times r^2$ به دست می‌آید. در این رابطه π عددی است ثابت که تقریباً $\pi = 3/14$ در نظر گرفته می‌شود و شعاع دایره است:

۱. آیا متغیر S تابعی از شعاع دایره است؟
۲. آیا محیط دایره نیز تابعی از شعاع است؟
۳. کدام متغیر، مستقل و کدام متغیر، وابسته است؟
۴. جدول زیر را کامل کنید.

r بر حسب سانتی متر (شعاع)	۱	۱/۵	۲	۳	۴
S بر حسب سانتی متر مربع (مساحت)	π	...	4π
P بر حسب سانتی متر (محیط)	6π	...

در رابطه خطی $y = 3x + 1$ نیز y ، تابعی از تغییرات متغیر مستقل x است، یعنی وقتی x را به دلخواه و مستقل، تغییر می‌دهیم، y نیز تغییر می‌کند. حال اگر x ها را روی محور افقی و y های حاصل را روی محور عمودی در نظر بگیریم، به ازای هر x و y حاصل، یک نقطه در صفحه مشخص می‌شود که آن را با یک زوج به شکل (x, y) نمایش می‌دهیم. ترتیب قرار گرفتن x و y در این زوج اهمیت دارد و به همین دلیل آن را یک زوج مرتب می‌نامیم. در زوج مرتب (x, y) ، x را مؤلفه یا مختص اول و y را مؤلفه دوم می‌نامیم. اگر $(a, b) = (c, d)$ آنگاه $a = c$ و $b = d$ و برعکس اگر $a = c$ و $b = d$ آنگاه $(a, b) = (c, d)$



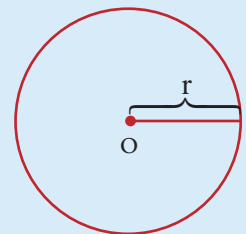
فعالیت

۱. جدول زیر را کامل کنید.

x	-۱	۲	$y = 3x + 1$
y	-۲	$3\sqrt{2} + 1$...	
(x, y)	$(-1, -2)$	$(..., 1)$	$(\frac{2}{3}, 3)$	$(1, ...)$	$(..., ...)$	$(..., ...)$	



$$\frac{2\pi r}{2r} = \pi$$



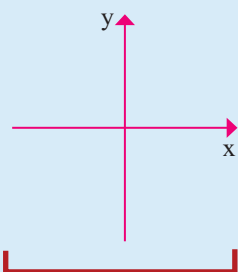
ریاضی‌دان و منجم ایرانی، جمشید غیاث‌الدین کاشانی در اوایل قرن هشتم هـ. ق توانست عدد π را با دقتی که تا ۱۵۰ سال بعد از وی بی‌نظیر ماند، محاسبه کند. او کتاب رساله محیطیه خود را با این جمله شروع می‌کند: «به نام او که از اندازه نسبت محیط دایره به قطرش آگاه است.»

۲. مشابه قسمت ۱ جدولی برای $y = x^2$ تشکیل دهید.

استفاده از نمودار و رسم پیکان‌هایی از طرف متغیر مستقل به سمت متغیر وابسته به درک ارتباط بین این دو متغیر کمک می‌کند. به کار در کلاس زیر توجه کنید:



نمودار خط $y = 2x - 3$ را روی دستگاه مختصات رسم کنید:



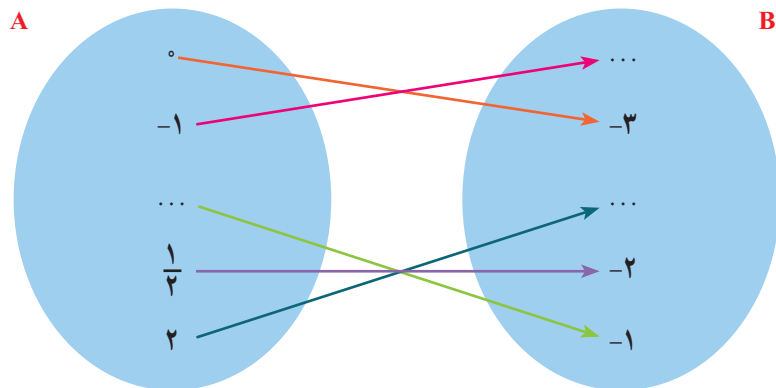
کار در کلاس



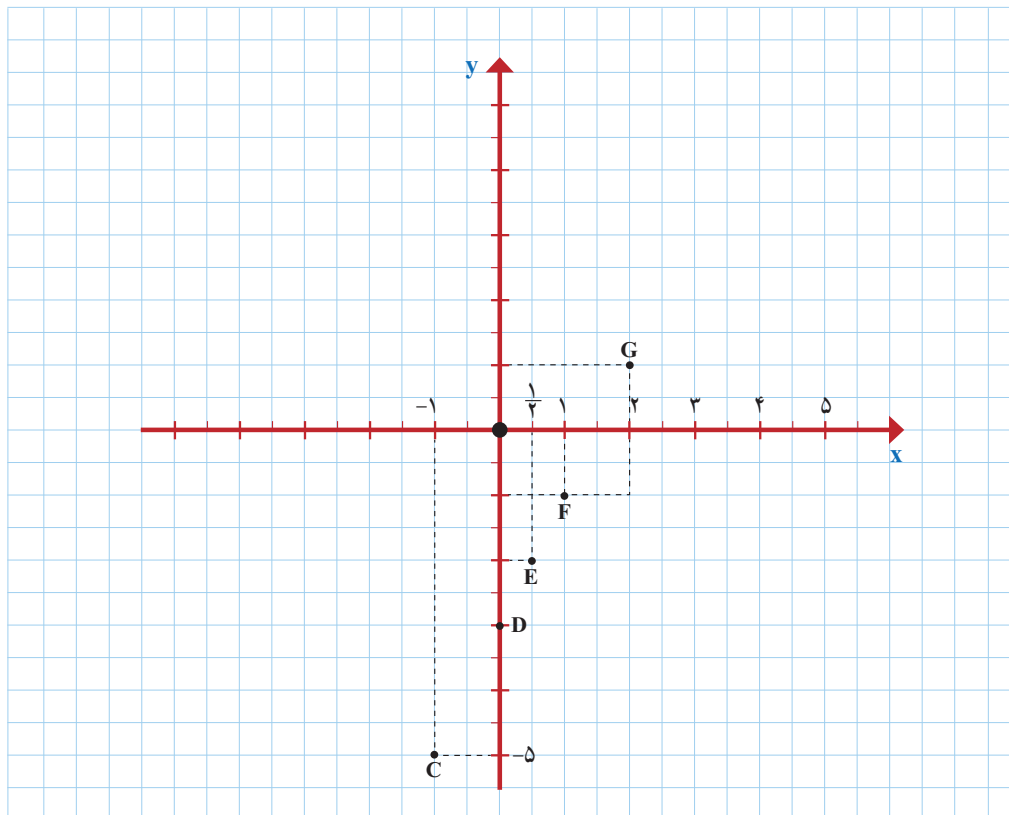
با توجه به رابطه خطی $y = 2x - 3$ ، اگر فرض کنیم، x ها یا متغیرهای مستقل اعضای مجموعه

$A = \left\{ 0, 1, -1, \frac{1}{2}, 2 \right\}$ باشند. ابتدا جدول مربوط به این رابطه را مشابه جدول قبل، تشکیل می‌دهیم و سپس نمودار پیکانی آن را رسم می‌کنیم. (جاهای خالی را پر کنید.)

x	-1	0	$\frac{1}{2}$	1	2	$y = 2x - 3$
y	-5	
(x, y)	$(-1, -5)$ C	$(0, \dots)$ D	



اگر هر یک از «زوج مرتب»های جدول قبل را یک نقطه در صفحه فرض کنیم، نمودار مختصاتی رابطه خطی قبل به صورت زیر رسم می شود:



◆ سؤال: برای رابطه $y = x^2$ که $x \in A = \{-3, -2, -1, 0, 1, 2, 3\}$ مشابه مثال قبل، جدول، نمودار پیکانی و نمودار مختصاتی را تشکیل دهید.

مفهوم تابع

در تمام فعالیت‌ها، مثال‌ها و تمرین‌های قبل، رابطه‌ها طوری تعریف شده بودند که به ازای هر متغیر مستقل مانند x ، دقیقاً یک مقدار برای y به دست می‌آید؛ مثلاً در رابطه $y = 2x + 3$ اگر x را مساوی ۲ فرض کنیم، $y = 2 \times 2 + 3 = 7$ به دست می‌آید.

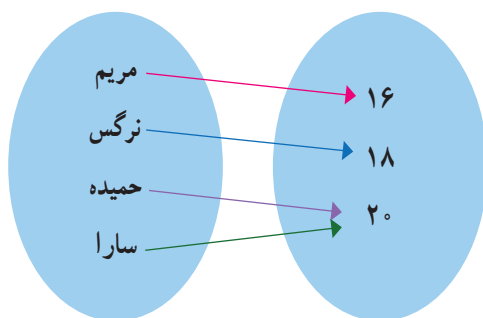
اگر این ویژگی برای یک رابطه وجود داشته باشد، آن را تابع می‌نامند. به عبارت دقیق‌تر:

یک رابطه بین دو مجموعه A و B (از مجموعه A به مجموعه B) یک تابع نامیده می‌شود؛ هرگاه متناظر با هر عضو از مجموعه A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را بتوان نظیر یا مربوط کرد.



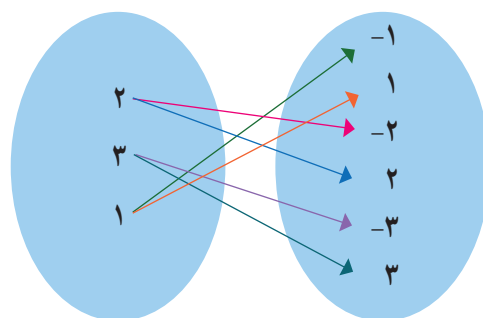
فعالیت

۱. کدام یک از رابطه‌ها که با نمودار پیکانی نمایش داده شده‌اند، تابع‌اند؟ چرا؟

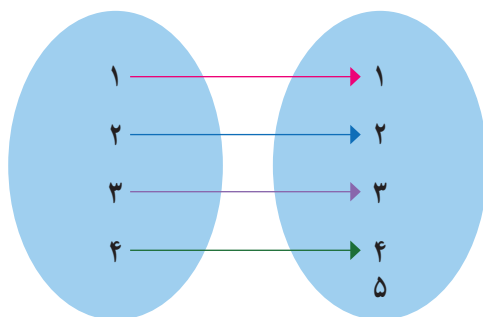


دانش‌آموزان نمرات درس فیزیک

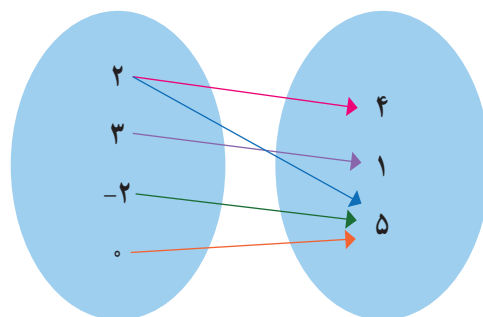
تابع زیرا



تابع زیرا



تابع زیرا



تابع زیرا

۲. کدام مجموعه از زوج مرتب‌ها، نمایش یک تابع است؟

الف) $F = \{(2,3), (3,3), (4,3), (5,3)\}$

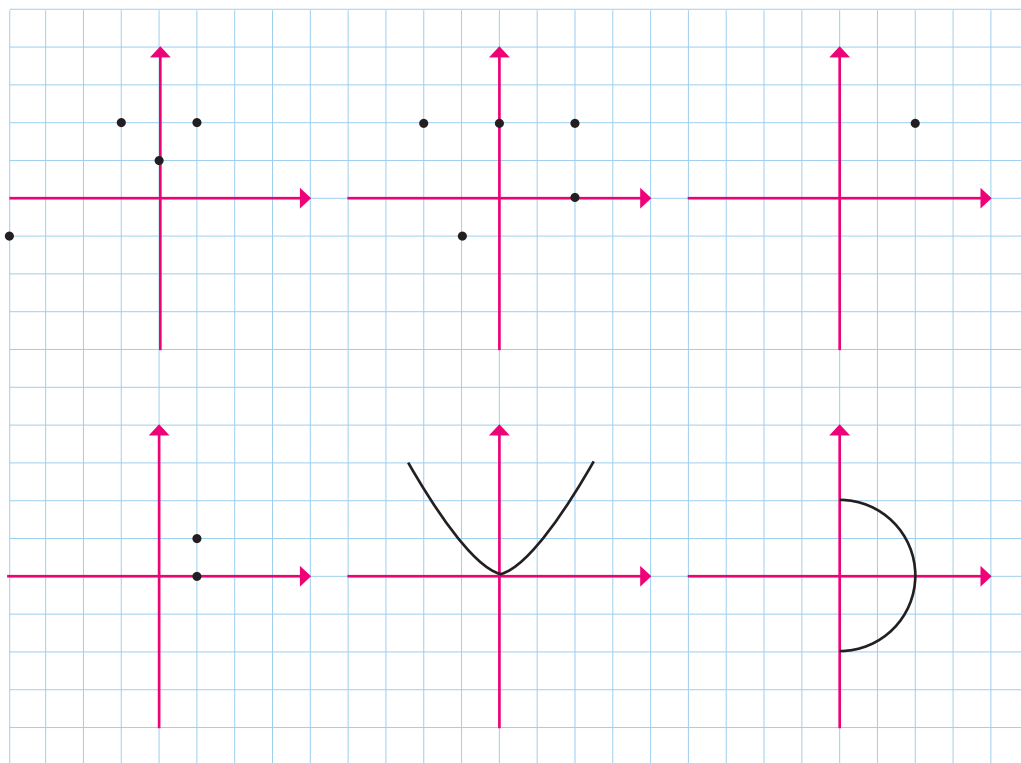
ب) $G = \{(4,1), (2,-1), (1,-1), (4,2)\}$

پ) $H = \{(2,3)\}$

ت) $I = \{(3,3)\}$

ث) $J = \{(1,1), (2,2), (3,3), (2,4)\}$

۳. کدام یک از رابطه‌ها که نمودار مختصاتی آنها رسم شده است، تابع است، تابع اند؟ چرا؟



۴. کدام یک از رابطه‌های تعریف شده زیر، تابع است و کدام تابع نیست؟ دلایل خود را بنویسید.

(الف) رابطه‌ای که به هر شهر در ایران، سوغاتی آن شهر را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

(ب) رابطه‌ای که به هر فرد، روز تولد او را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

(پ) رابطه‌ای که به هر شهر، نماینده آن شهر در مجلس شورای اسلامی را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست

(ت) رابطه‌ای که به هر مسلمان، قبله او را نسبت می‌دهد.

تابع است تابع نیست



با توجه به فعالیت قبل و تعریف تابع می‌توان گفت:

- اگر رابطه بین x و y را $(x$ متغیر مستقل) به صورت جدولی و زوج مرتبی نمایش دهیم، در صورتی تابع است که هیچ دو زوج مرتب متمایزی با مؤلفه‌های اول برابر در آن وجود نداشته باشد.
- اگر رابطه از مجموعه A به مجموعه B را با نمودار پیکانی نمایش دهیم، در صورتی این رابطه تابع است که از هر عضو A دقیقاً یک پیکان خارج شود.
- اگر نمودار مختصاتی یک رابطه رسم شود، در صورتی این رابطه تابع است که هیچ دو نقطه‌ای روی خطی که موازی محور y ها باشد، قرار نگیرند.



کار در کلاس

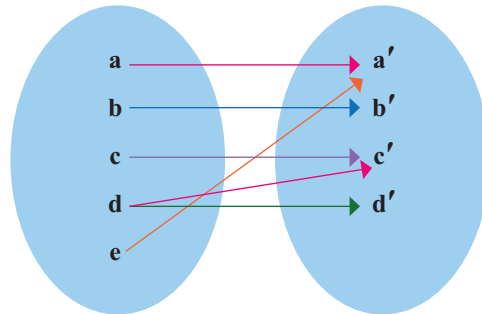
در جدول زیر در هر سطر یکی از نمایش‌های رابطه‌ای مشخص شده است. ابتدا برای هر رابطه جاهای خالی را پر کنید سپس تشخیص دهید که کدام رابطه، تابع است.

نمایش پیکانی	نمایش مختصاتی	نمایش زوج مرتبی	توصیفی	جدولی										
				<table border="1"> <thead> <tr> <th>x</th> <th>y</th> </tr> </thead> <tbody> <tr> <td>۱</td> <td>۱</td> </tr> <tr> <td>۲</td> <td>۴</td> </tr> <tr> <td>۳</td> <td>۹</td> </tr> <tr> <td>۴</td> <td>۱۶</td> </tr> </tbody> </table>	x	y	۱	۱	۲	۴	۳	۹	۴	۱۶
x	y													
۱	۱													
۲	۴													
۳	۹													
۴	۱۶													
			<p>f رابطه‌ای است که به هر عضو مجموعه $A = \{0, 1, -1, 2, -2\}$ توان چهارم آن را نسبت می‌دهد</p>											
		<p>$f = \{(\text{شنا}, \text{علی}) \text{ و } (\text{فوتبال}, \text{رضا}), (\text{شنا}, \text{رضا}) \text{ و } (\text{والیبال}, \text{آرش}) \text{ و } (\text{کشتی}, \text{حمید}) \text{ و } (\text{تیراندازی}, \text{علی})\}$</p>												



تمرین

۱. نمودار پیکانی یک رابطه رسم شده است. با حذف کدام عضو این رابطه تابع خواهد شد؟

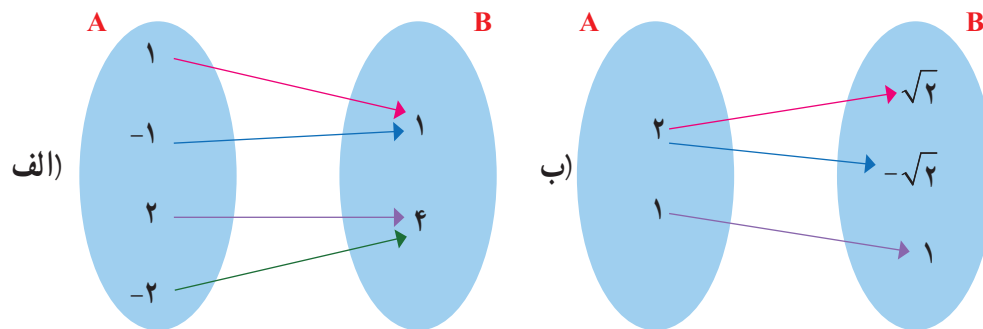


۲. اگر A مجموعه‌ای ۳ عضوی و B مجموعه‌ای ۲ عضوی فرض شود. سه تابع از مجموعه A به مجموعه B را تعریف کنید.

۳. در رابطه زیر جاهای خالی را اعدادی قرار دهید که این رابطه تابع نباشد.

$$f = \{(2, 3), (\dots, 5), (3, \dots), (\dots, \dots)\}$$

۴. کدام رابطه تابع است و کدام رابطه تابع نیست؟ چرا؟



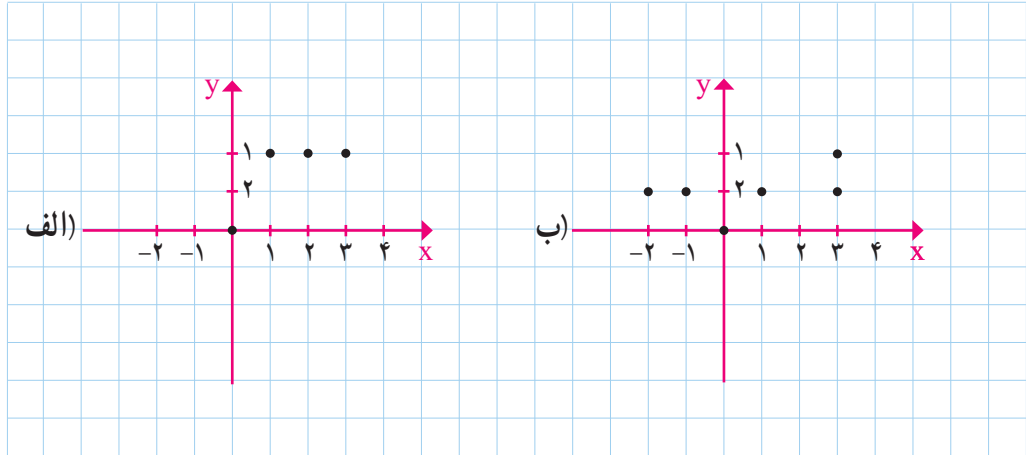
پ) $f = \{(2, 1), (3, 2), (2, 2), (3, 4), (5, 1)\}$

ت) رابطه‌ای که به هر شخص، شماره ملی او را نسبت می‌دهد.

۵. اگر رابطه f تابع باشد، در این صورت حاصل $x^2 + y^2$ را به دست آورید. (مجموعه f را پس از محاسبه x و y بنویسید.)

$$f = \{(2, x + y), (2, 4), (5, 2), (3, 4), (5, x - y)\}$$

۶. نمودار کدام رابطه یک تابع را مشخص می کند؟



خواندنی

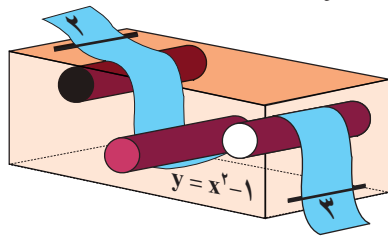
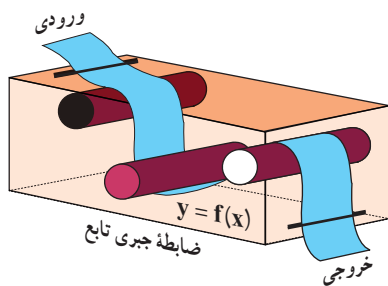
توابع در شاخه های مختلف علوم کاربرد فراوان دارند. برای مثال در علم اقتصاد از تابع سود، تابع هزینه و تابع درآمد در محاسبات و تصمیم گیری های اقتصادی استفاده می شود و یا در فیزیک، هنگامی که می خواهیم رابطه بین چند متغیر را بیان کنیم، مخصوصاً هنگامی که مقدار یک متغیر کاملاً وابسته به متغیرهای دیگر است، از توابع استفاده می شود.

توابع در علوم مختلف بیشتر به عنوان عملگر در نظر گرفته می شوند و کاری را بر روی ورودی های خود انجام می دهند. توابع را همچنین مورد استفاده در علم رایانه برای مدل سازی ساختمان داده ها و تأثیرات الگوریتم می بینیم.

درس ۲

ضابطه جبری تابع

گاهی اوقات می‌توانیم رابطه بین مؤلفه اول و دوم زوج مرتب‌های مربوط به یک تابع را با



یک ضابطه (قانون) بیان کنیم. به‌طور مثال تابع

$$f = \left\{ (1, 4), (2, 5), (-1, 2), \left(\frac{1}{2}, \frac{7}{2}\right) \right\}$$

در این تابع همواره با اضافه کردن ۳ واحد به مؤلفه اول

مؤلفه دوم، به دست می‌آید. به عبارت دیگر اگر $(x, y) \in f$ ،

در این صورت $y = x + 3$ معادله $y = x + 3$ را ضابطه

تابع f می‌نامیم. اگر تابع f را به‌عنوان یک ماشین در نظر بگیریم

و x متغیر مستقل فرض شود، در این صورت تأثیر تابع f

روی x را با $f(x)$ نمایش می‌دهیم و حاصل این تأثیر همان y

(متغیر وابسته) است؛ یعنی، $y = f(x)$

دامنه و بُرد تابع

در نمایش توسط زوج مرتب برای یک تابع، مجموعه شامل همه مؤلفه‌های

اول را دامنه تابع و مجموعه شامل همه مؤلفه‌های دوم را بُرد تابع می‌نامیم.

دامنه تابع f را با D_f و بُرد آن را با R_f نشان می‌دهیم.

یک تابع مانند f از مجموعه A به مجموعه B ، قانون یا ضابطه‌ای است که به هر عضو از A دقیقاً یک عضو از مجموعه B را نسبت دهد.



۱. Domain
۲. Range

برای نمایش تابعی چون f از مجموعه A به مجموعه B می‌نویسیم: $\begin{cases} f: A \rightarrow B \\ y = f(x) \end{cases}$ که $y = f(x)$ را ضابطه تابع و A را دامنه تابع f در نظر می‌گیریم.

فعالیت



با توجه به ضابطه هر تابع و مانند نمونه، مجموعه مقادیر یا بُرد هر تابع را مشخص کنید.

$$f: A \rightarrow B$$

$$f(x) = 2x^2 + 1, \quad A = \left\{ -1, \sqrt{2}, 2, 1, 0, \frac{1}{2} \right\}$$

x	$f(x) = 2x^2 + 1$
-1	$f(-1) = 2 \times (-1)^2 + 1 = 3$
$\sqrt{2}$	$f(\sqrt{2}) = 2 \times (\sqrt{2})^2 + 1 = 5$
2	$f(2) = 2 \times (2)^2 + 1 = 9$
1	$f(1) = 2 \times (1)^2 + 1 = 3$
0	$f(0) = 2 \times (0)^2 + 1 = 1$
$\frac{1}{2}$	$f\left(\frac{1}{2}\right) = 2 \times \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 1 = \frac{3}{2}$

$$\rightarrow R_f = \left\{ 3, 5, 9, 1, \frac{3}{2} \right\}$$

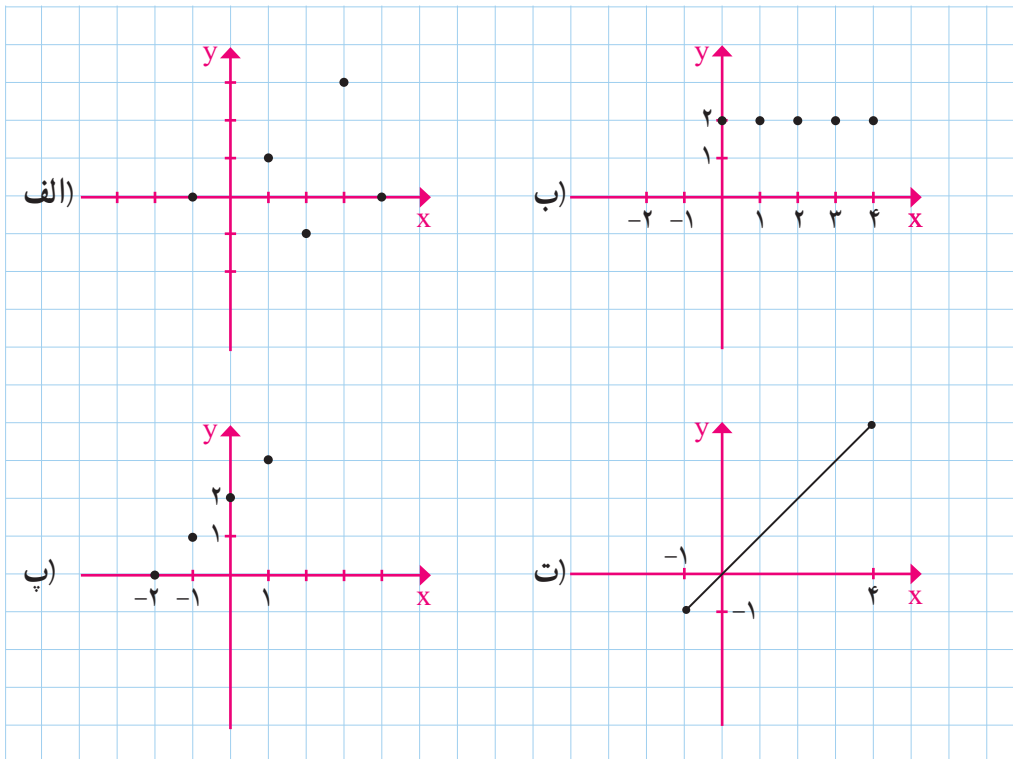
الف) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = x^3 - 1, \quad A = \left\{ 1, -1, 0, 4, \sqrt[3]{3}, \frac{1}{3}, 2 \right\}$

ب) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \sqrt{x+1} - 1, \quad A = \{0, -1, 8, 3, 2\}$

پ) $f: A \rightarrow B$
 $f(x) = \frac{x+1}{x-2}, \quad A = \left\{ -2, 0, 1, \sqrt{2}, \frac{1}{2} \right\}$



۱. برای هریک از توابع زیر، دامنه و بُرد را مشخص کنید و در صورت امکان ضابطه هر تابع را بنویسید.

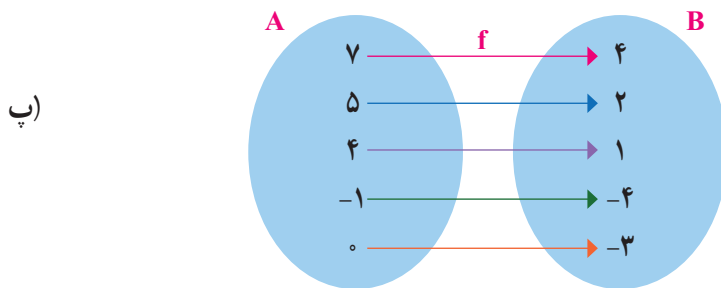


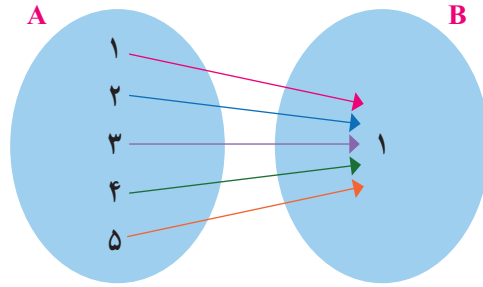
۲. دامنه و برد هریک از تابع‌های زیر را مشخص کنید.

(الف) $f: A \rightarrow B$ $R_f = \{2, 3, 4, 5, \dots\}$

$f(x) = x + 4$ $A = \{2, \dots, \dots, \dots, \dots\}$

(ب) $f = \{(1, -1), (2, -2), (3, -3), (4, -4), (\sqrt{2}, -\sqrt{2})\}$





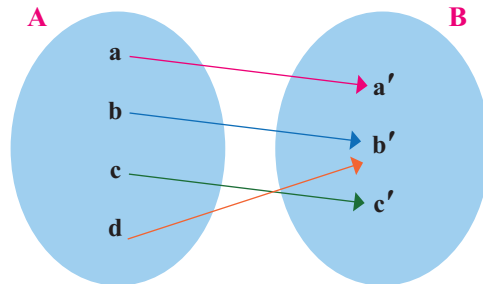
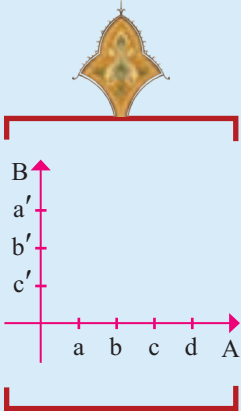
ت)

$$\text{ث) } f = \left\{ (1, 1), (2, 2), (3, 3), \left(\frac{1}{4}, \frac{1}{4}\right), (\sqrt{2}, \sqrt{2}), (0, 0) \right\}$$

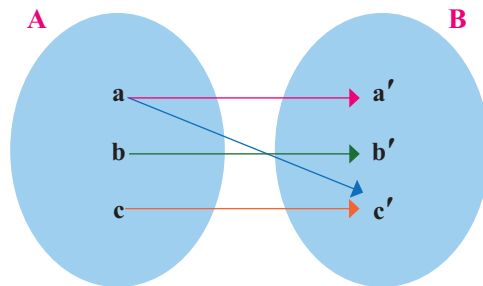
تمرین



۱. کدام یک از رابطه‌های زیر تابع است؟ چرا؟ برای هر رابطه نمودار مختصاتی را رسم کنید.



الف)



ب)

$$\text{پ) } f = \{(2, -1), (3, -1), (1, -1), (4, 1), (2, 4)\}$$

$$\text{ت) } g = \{(1, 1)\}$$

$$\text{ث) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x + 1$$

$$\text{ج) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = x$$

$$\text{ح) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2$$

۲. بُرد هریک از توابع زیر را با توجه به ضابطه و دامنه داده شده، به دست آورید.

$$\text{الف) } f: A \rightarrow B, A = \{0, -1, 1, 2, -2\}$$

$$f(x) = x^2 + x + 1$$

$$\text{ب) } f: A \rightarrow B, A = \left\{ \frac{1}{2}, 1, -1, 2, -2 \right\}$$

$$f(x) = \frac{x+1}{x}$$

$$\text{پ) } f: A \rightarrow B, A = \{0, 1, 2, 3, 4, 8\}$$

$$f(x) = \sqrt{x+1}$$

$$\text{ت) } f: A \rightarrow B, A = \mathbb{W} = \{0, 1, 2, \dots\}$$

$$f(x) = x$$

$$\text{ث) } f: A \rightarrow B, A = \mathbb{R}$$

$$f(x) = 0$$

۳. تابع f به هر عدد حقیقی، دو برابر مکعب همان عدد، منهای ۴ را نسبت می دهد. f کدام تابع است؟ حاصل $f(3)$ را بیابید.

$$\text{الف) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2(x-4)^2$$

$$\text{ب) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2\sqrt[3]{x-4}$$

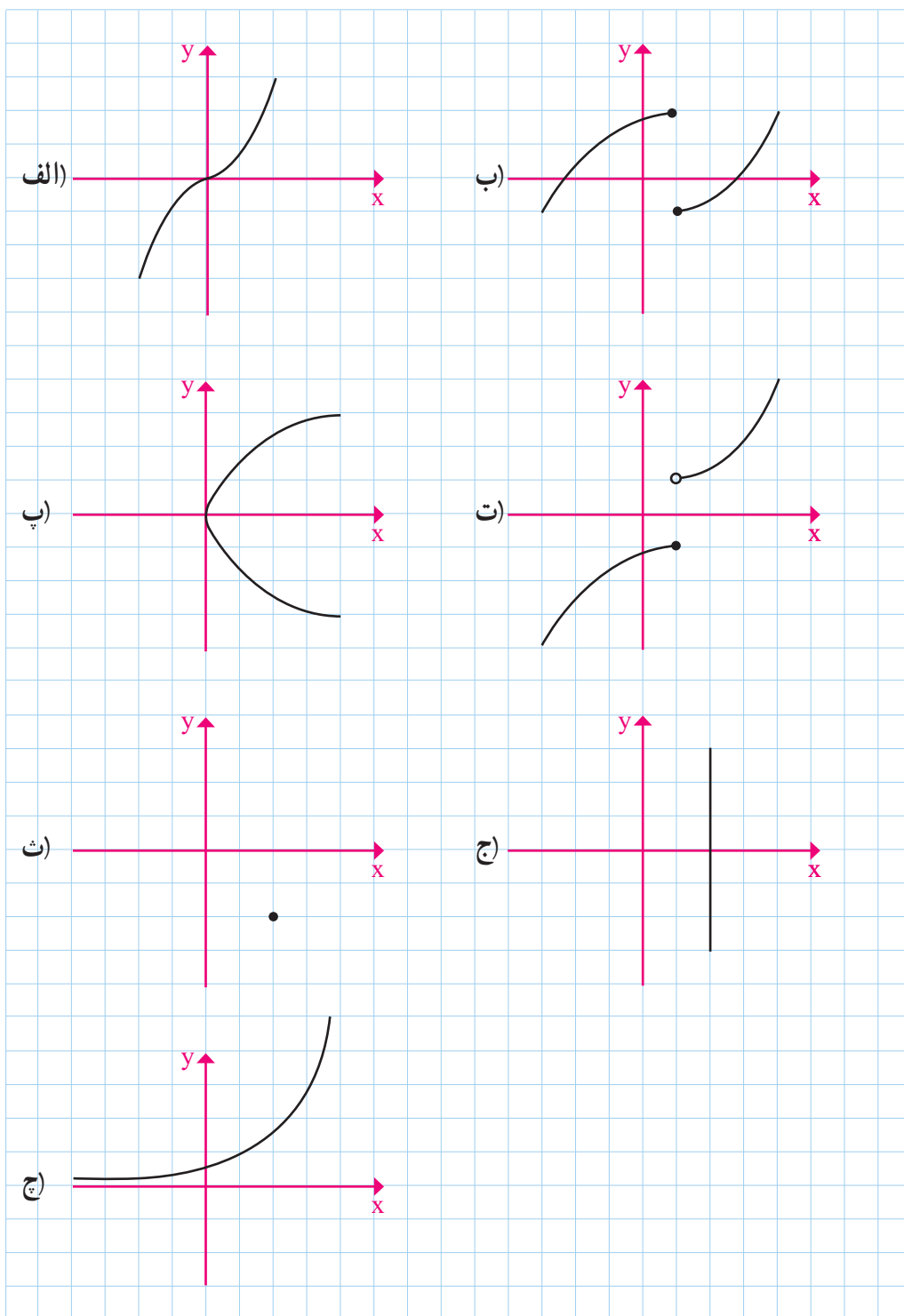
$$\text{پ) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2x^2 - 4$$

$$\text{ت) } f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$$

$$f(x) = 2\sqrt{x-4}$$

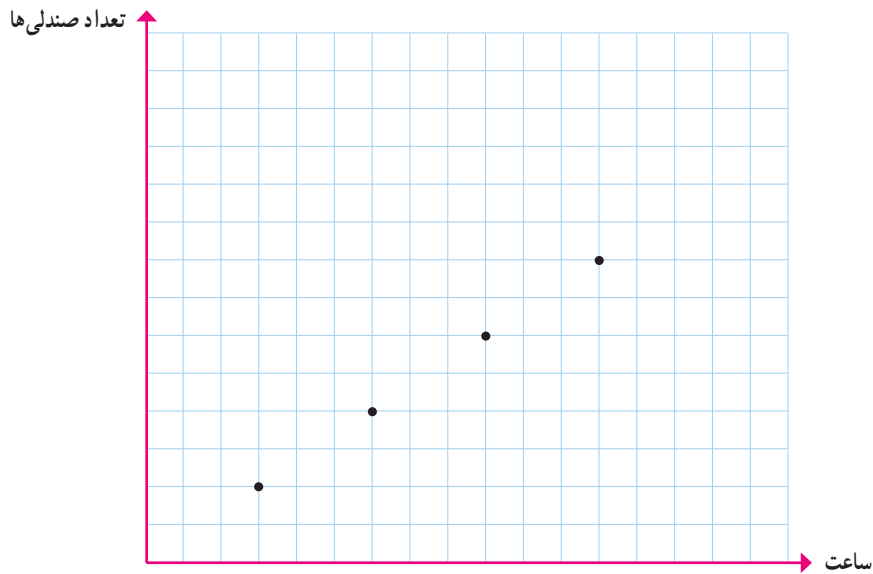
۴. کدام نمودار، نمایش یک تابع می‌باشد؟ چرا؟



درس ۳

نمودار تابع خطی

سؤال: نمودار زیر تعداد صندلی‌هایی را که در پایان هر سه ساعت کار در یک کارگاه تولید می‌شوند، نشان می‌دهد. آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه را در پایان پانزدهمین ساعت کاری پیش‌بینی کنید؟



- آیا تعداد صندلی‌های تولید شده در پایان هشتمین ساعت کاری بیشتر از پنج عدد است؟
- آیا می‌توانید تعداد صندلی‌های تولید شده در این کارگاه در پایان هر ساعت خاص را پیش‌بینی کنید؟

فعالیت



الف) طول یک فنر در حالتی که به آن هیچ وزنه‌ای آویزان نشده است ۵ سانتی‌متر است و به‌ازای هر کیلوگرم وزنه‌ای که به آن آویزان شود، نیم سانتی‌متر به طول آن افزوده می‌شود.

طول فنر را در شکل‌های زیر مشخص کنید.

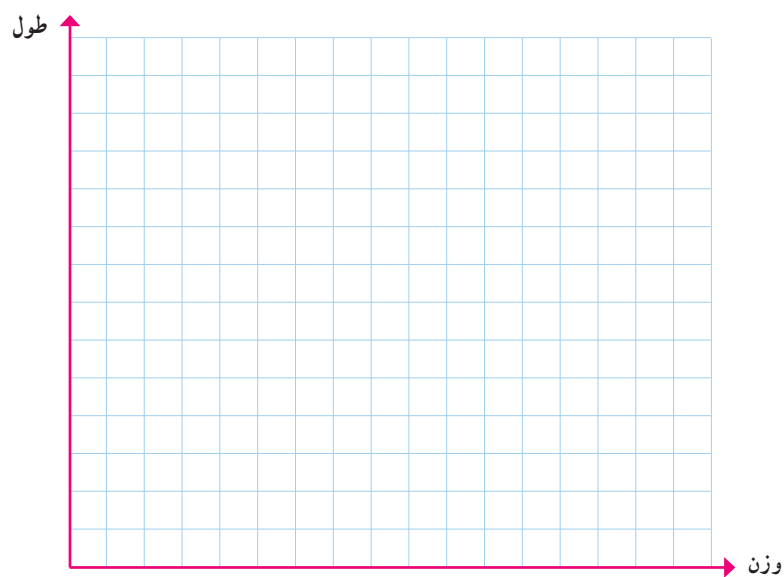


ب) جدول زیر را تکمیل نمایید.

اندازه وزنه (بر حسب کیلوگرم)	۱	۲	۵	۷	۲۰	a
طول فنر (بر حسب سانتی‌متر)						

پ) اگر تابع طول فنر را با f نشان دهیم، مقادیر $f(1)$, $f(4)$, $f(8)$ و $f(10)$ (بر حسب سانتی‌متر) را محاسبه کنید.

ت) نقاط به دست آمده از قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم، مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



فعالیت

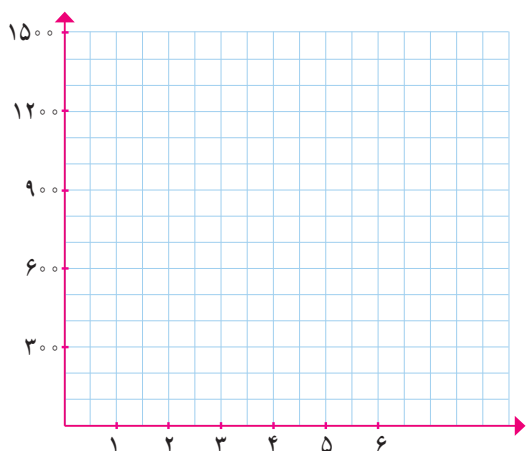


یک کارخانه تولید لوله‌های آبیاری کشاورزی^۱ در هر ساعت $\frac{1}{3}$ کیلومتر لوله تولید می‌کند.

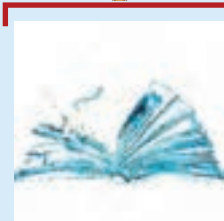


x بر حسب ساعت	۱	۲	۳	۴	۵
$f(x)$ بر حسب متر					

اگر متر از لوله‌ای را که این کارخانه پس از x ساعت تولید می‌کند، بر حسب متر با $f(x)$ نشان دهیم. جدول روبه‌رو را برای $f(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل نمایید.



نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



کتاب و آب
هر دو در بحران‌اند؛
یکی از کم‌مصرفی،
دیگری از پرمصرفی!

هر تابع به صورت $y = f(x)$ که در آن $y = mx + h$ ، یک تابع خطی نامیده می‌شود.

توابع به دست آمده در دو فعالیت قبل، هر دو توابع خطی‌اند.

۱. کشاورزی یکی از مهم‌ترین بخش‌های جامعه است که ۱۸ درصد تولید ناخالص ملی، ۲۵ درصد اشتغال‌زایی، تأمین ۸۵ درصد غذای جامعه، ۲۵ درصد صادرات غیر نفتی و فراهم کردن بخش عمده‌ای از مواد اولیه مورد استفاده در صنعت را عهده‌دار است. بنابراین رشد و توسعه در این بخش زمینه‌ساز پیشرفت اقتصادی، اجتماعی و صنعتی کشور است. ایران به دلیل موقعیت جغرافیایی خاص، دارای اقلیم خشک و نیمه خشک است. از طرف دیگر، آمار و ارقام موجود در بخش کشاورزی نشان‌دهنده این است که در بسیاری از مناطق در مقابل آب در دسترس، محدودیت زمین وجود نداشته و هرچه امکان صرفه جویی در مصرف آب با استحصال منابع آبی جدید وجود داشته باشد، می‌توان میزان کشت آبی و نهایتاً میزان تولیدات کشاورزی را بالا برد. بخش کشاورزی با ۹۲ درصد بزرگ‌ترین و مهم‌ترین مصرف‌کننده آب در کشور به شمار می‌رود که متأسفانه بیش از ۸۰ درصد اتلاف منابع آب به دلیل عدم استفاده از فناوری (تکنولوژی)‌های پیشرفته آبیاری در این بخش به هدر می‌رود. تعدادی از کارشناسان معتقدند که مدیریت منابع آب کشور در شرایط فعلی مدیریت مناسبی نیست و موجب شده تا طی سال‌های اخیر شاهد کاهش منابع آبی‌های زیرزمینی و نیز کاهش سطح زیرکشت کشاورزی در برخی مناطق باشیم. لذا دستیابی به بهبود بهره‌وری آب به عنوان شاخص مصرف آب در انواع تولیدات کشاورزی پایدار، امری ضروری است.

رسم نمودار تابع درجه یک

برای رسم نمودار تابع $y=mx+h$ دو نقطه از نمودار تابع را در دستگاه مختصات مشخص می‌کنیم و سپس آن دو نقطه را به وسیله خطی به هم وصل می‌کنیم.



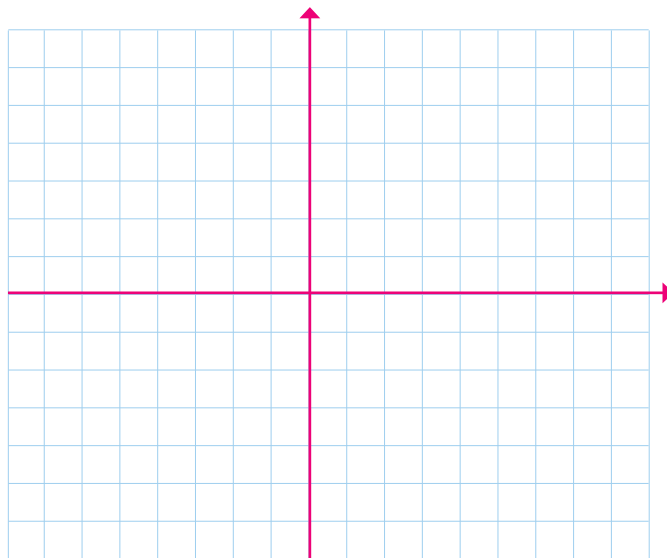
کار در کلاس

در یک تابع خطی $f(0)=2$ و $f(2)=3$ با توجه به معادله خط که در کتاب ریاضیات نهم دیده‌اید، ابتدا m و سپس به کمک آن $f(x)$ را مشخص و نمودار تابع را رسم کنید.

$$m = \frac{3 - \dots}{\dots - 0} = \dots$$

معادله خط:

$$f(x) = \dots\dots\dots$$



کار در کلاس

جدول زیر رابطه بین عمق و دمای سنگ‌ها را در زیر زمین نشان می‌دهد. x معرف عمق (بر حسب کیلومتر) و y معرف دما (بر حسب سانتی‌گراد) است.

x	۲	۴
y	۷۵	۱۸۵

اگر دمای سنگ‌ها تابع خطی برحسب عمق باشد، ابتدا جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن تابع $y=f(x)$ را مشخص نموده سپس تعیین کنید در چه عمقی دما به 44° درجه سانتی‌گراد می‌رسد؟

شیب خط: $m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}$	معادله خط یا ضابطه تابع: $y=f(x)=mx+h$	$f(1)$	$f(2)$

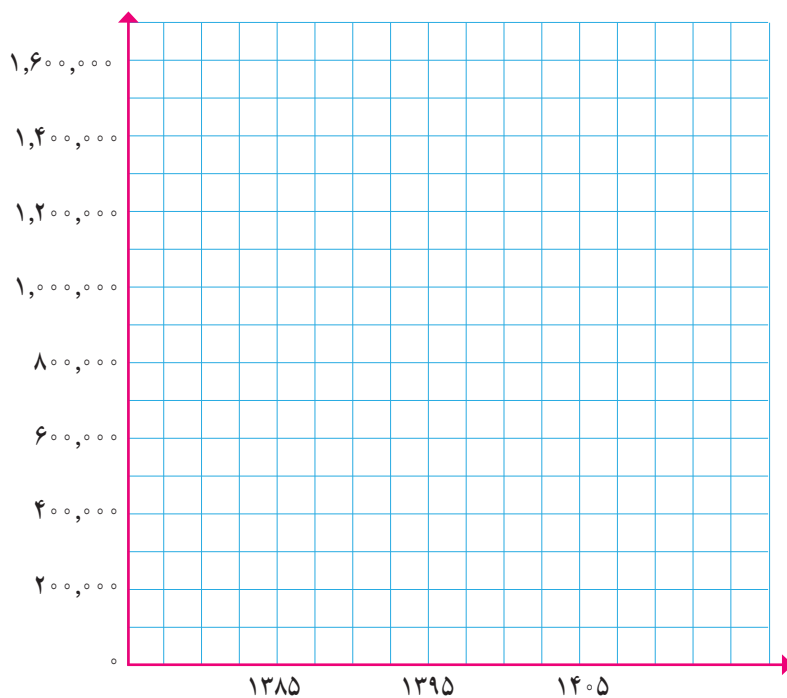
کار در کلاس



در برنامه‌ریزی اقتصادی، اجتماعی و مواردی از این قبیل، اولین گام، پیش‌بینی جمعیت در برنامه‌ریزی است. برای برآورد جمعیت، مدل‌های مختلفی وجود دارد که هر کدام ویژگی‌های خود را دارند. انتخاب نوع مدل و استفاده از آن در درجه اول به اطلاعات موجود در زمان و سپس به هدف برنامه‌ریزی بستگی دارد. یکی از این روش‌ها، مدل رشد خطی است. این مدل، الگویی از رشد جمعیت را توصیه می‌کند که در آن میزان جمعیت همچنان با نرخ فعلی خود تغییر می‌کند. (روند رشد جمعیت به صورت تابعی خطی نسبت به متغیر زمان است.) فرض کنیم جمعیت یک شهر در سال ۱۳۸۵ برابر یک میلیون و پنجاه هزار نفر و در سال ۱۳۹۵ برابر یک میلیون و دویست و هشتاد هزار نفر بوده است. اگر برای رشد جمعیت این شهر، مدل الگویی رشد خطی را در نظر بگیریم، با رسم نمودار تابع جمعیت، جمعیت این شهر را در سال ۱۴۰۵ به طور تقریبی برآورد کنید.



نرخ رشد:
به میزان افزایش
یک کمیت
(نظیر جمعیت)
در واحد زمان،
نرخ رشد گفته می‌شود.





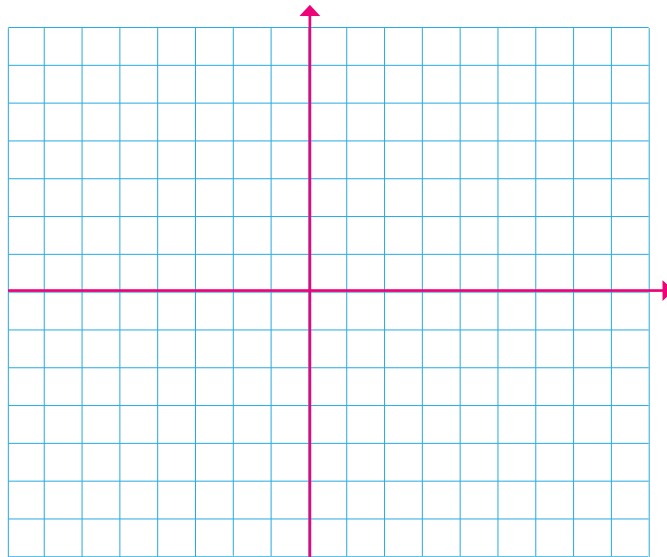
کار در کلاس

ضابطه تابع محیط مستطیل‌هایی را که طول آنها ۴ واحد بیشتر از عرض آنها است، بر حسب عرض آن بنویسید و نشان دهید یک تابع خطی است.
- آیا تابع مساحت آنها نیز یک تابع خطی است؟



کار در کلاس

اگر نمودار تابع خطی f از مبدأ عبور کرده و $f(-1)=2$ باشد، نمودار و ضابطه تابع f را مشخص کنید.



تمرین

- مقادیر m و n را چنان بیابید تا در تابع با ضابطه $f(x)=mx+n$ داشته باشیم: $f(2)=4$ و $f(1)=1$.
- ضابطه تابع خطی f را که از نقاط $(2,3)$ و $(4,1)$ می‌گذرد، مشخص کنید و نمودار آن را رسم نمایید.
- در تابع خطی f داریم $f(1)=5$ و $f(2)=8$ ، مقادیر $f(-3)$ و $f(5)$ را بیابید.

۴. نمودار تابعی خطی را رسم کنید که دامنه آن برابر $A = \{x \in \mathbb{R} \mid 0 \leq x \leq 10\}$ و از نقطه $M \left(\frac{5}{7} \right)$ بگذرد.

۵. نمودار یک تابع خطی از مبدأ می‌گذرد و $f(2) = 7$ است. در این صورت اختلاف $f(0/1)$ و $f(-0/1)$ را به دست آورید.

۶. رابطه بین درجه دما برحسب سانتی‌گراد و فارنهایت به صورت $F = \frac{9}{5}C + 32$ است. دمای یک جسم 20° درجه سانتی‌گراد بالا رفته است. دمای آن برحسب فارنهایت چقدر افزایش داشته است؟

۷. یک شرکت برای تولید x کالا، $C(x) = 3000 + 50x$ تومان هزینه می‌کند و هر کالا را 70 تومان می‌فروشد.

الف) تابع سود را تعیین و نمودار آن را رسم کنید.

ب) این شرکت حداقل چه تعداد از این کالا را باید بفروشد تا سوددهی آغاز شود؟



کوه‌های مینیاتوری — چابهار

درس ۴

نمودار تابع درجه ۲

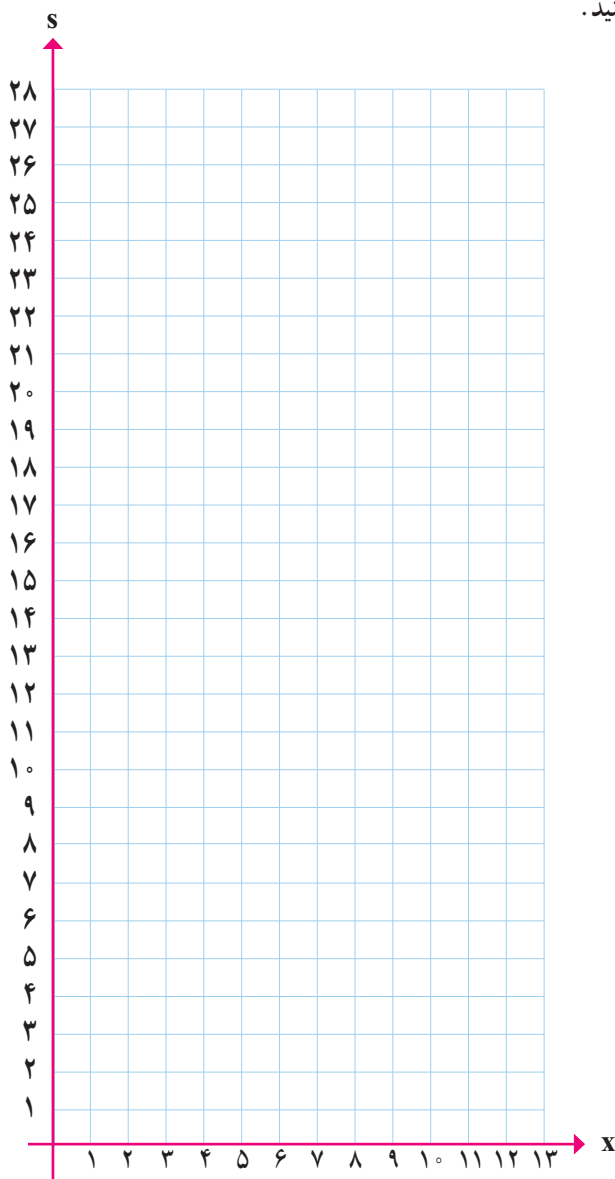


فعالیت

برای برگزاری یک جلسه، با کنار هم قرار دادن تعدادی میز به صورت مربعی 1×1 ، یک میز مستطیل شکل به محیط ثابت 20 تهیه می‌کنیم. اندازه ضلعی را که صندلی رئیس جلسه در آن قرار می‌گیرد با x و اندازه ضلع دیگر را با y نشان می‌دهیم همچنین مساحت مستطیل را با s نشان می‌دهیم. الف) جدول زیر را کامل کنید.

x	۱	۲			۶		۹
y	۹	۸	۷				
s	۹			۲۴			۱۶
(x, s)	(۱, ۹)	(۲, ۱۶)			(۵, ۲۵)		(۸, ۱۶)

ب) اگر هر زوج مرتب (x, s) را یک نقطه فرض کنیم، این نقاط را در دستگاه مختصات محورهای زیر مشخص کنید.



فعالیت



یک شرکت نقاشی ساختمانی قیمتی را که برای رنگ آمیزی روزانه هر مترمربع از دیوار بیرونی یک کارخانه تعیین می کند، مبلغ $x - 1200$ تومان است. x میزان رنگ آمیزی روزانه گروه بر حسب مترمربع است. هزینه رفت و آمد و صرف غذای گروه به طور ثابت روزانه 30000 تومان و همچنین مترمربعی 200 تومان هزینه لوازم مصرفی بر عهده گروه است.

الف) قیمت پرداختی شرکت برای هر مترمربع رنگ آمیزی به ازای $x=200$ (۲۰۰ متر کار در یک روز) و $x=300$ چقدر است؟

ب) هزینه گروه در یک روز به ازای $x=200$ و $x=300$ چقدر است؟

پ) اگر تابع سود گروه را با P نشان دهیم $P(200)$ ، $P(100)$ ، $P(300)$ را محاسبه کنید.

$$P(200) = 200 \times (1200 - 200) - (300000 + 200 \times 200) = -10400$$

$$P(100) =$$

$$P(200) =$$

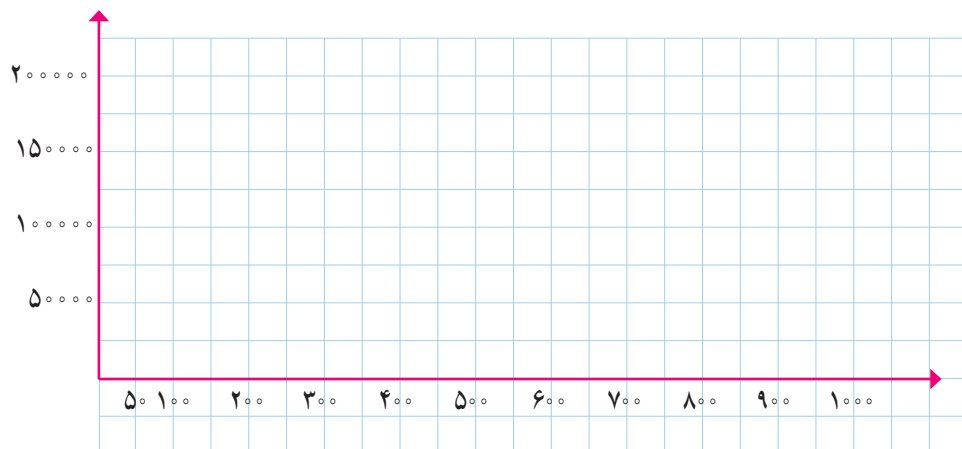
$$P(300) =$$

ت) حاصل $P(x)$ را به دست آورید و آن را ساده کنید.

ث) جدول زیر را برای $P(x)$ به ازای مقادیر مختلف x کامل کنید.

x	20	100	200	300	400	500	600	700	800	900
$P(x)$	-10400	60000								

ج) نقاط به دست آمده از جدول قسمت قبل را در یک دستگاه دو محور عمود بر هم مشخص کنید. نقاط حاصل را به هم وصل کنید.



ج) چرا بعضی از نقاط، پایین تر از محور افقی قرار می گیرند؟ آیا هرچه مترافز بیشتری رنگ آمیزی شود، گروه سود بیشتری کسب می کند؟



رسم نمودار تابع درجه دوم

معادلهٔ تابع درجهٔ دوم در حالت کلی به صورت $y = ax^2 + bx + c$ است که در آن $a \neq 0$ می‌باشد. نمودار آن به یکی از دو صورت \cup یا \cap است که به آن سهمی می‌گوییم. در سهمی به معادله $y = ax^2 + bx + c$ نقطه‌ای به طول $x = -\frac{b}{2a}$ رأس سهمی است. خطی که از رأس سهمی به موازات محور عرض‌ها رسم می‌شود، محور تقارن سهمی است.

- اگر در معادلهٔ سهمی $a > 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cup خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای کمترین مقدار است.

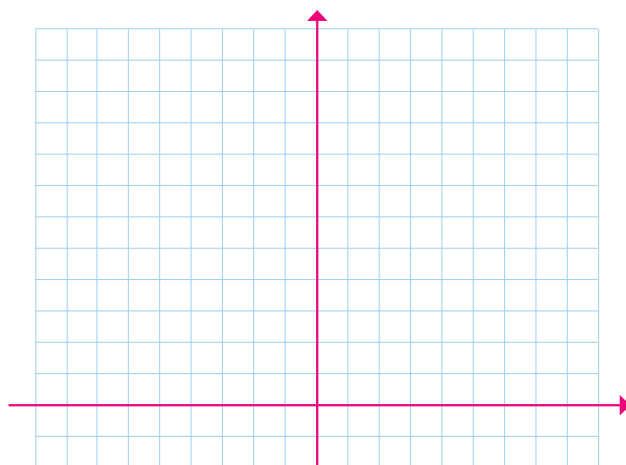
- اگر در معادلهٔ سهمی $a < 0$ باشد، شکل سهمی به صورت \cap خواهد بود. در این حالت سهمی در نقطه رأس خود دارای بیشترین مقدار است.

فعالیت



ابتدا جدول زیر را کامل کنید؛ سپس به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	2	3	4	...
y	...		9			0					...

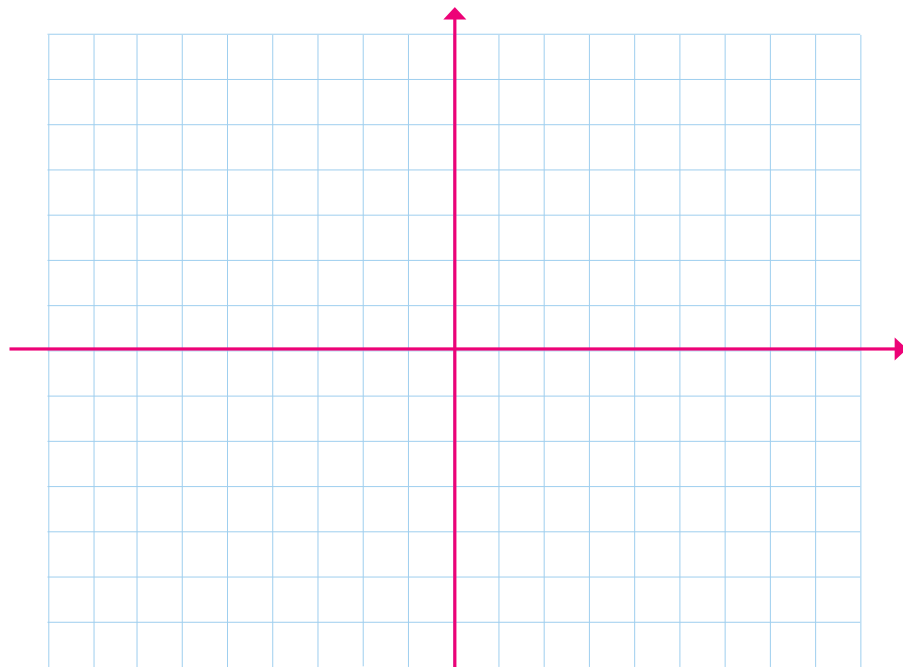




کار در کلاس

جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار تابع با ضابطه $f(x) = 4 - x^2$ را رسم کنید.

x	...	-4	-3	-2	-1	0	1	3	4	...
y			4				...



کار در کلاس

نقاط رأس سهمی‌هایی را که معادله‌های آنها داده شده است، مشخص کنید.

الف) $y = x^2$

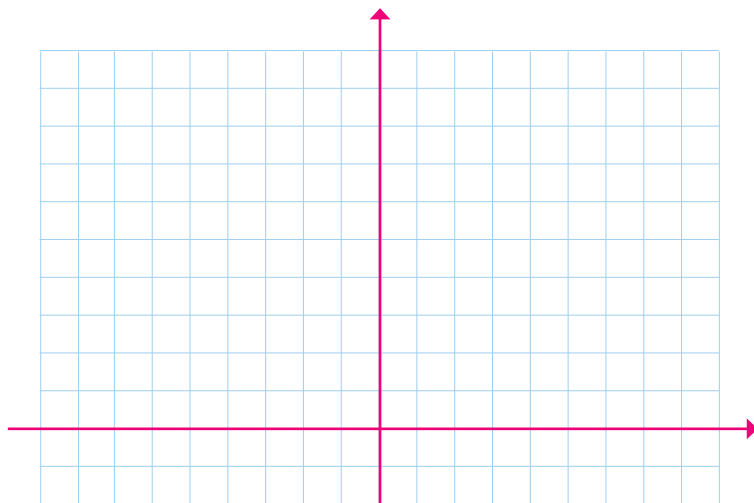
ب) $y = 4 - x^2$

پ) $y = 2x^2 - 4x + 1$

ت) $y = 2(x-1)^2 + 1$

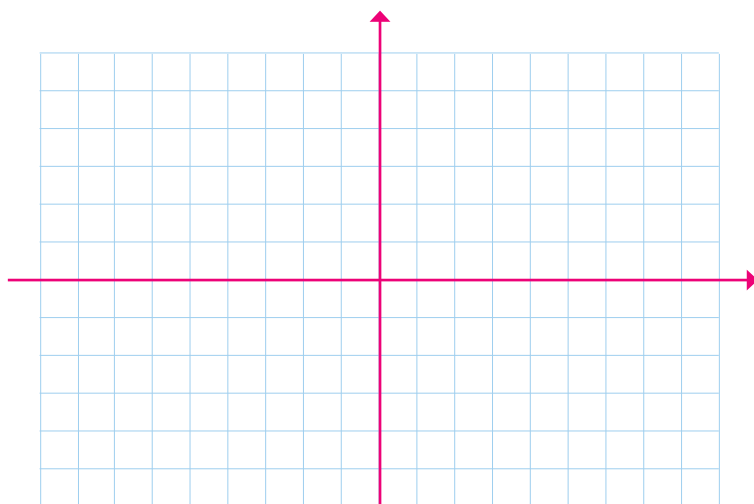


الف) رأس سهمی به معادله $y=2(x-1)^2+1$ را مشخص کنید به کمک آن نمودار سهمی را رسم کنید.



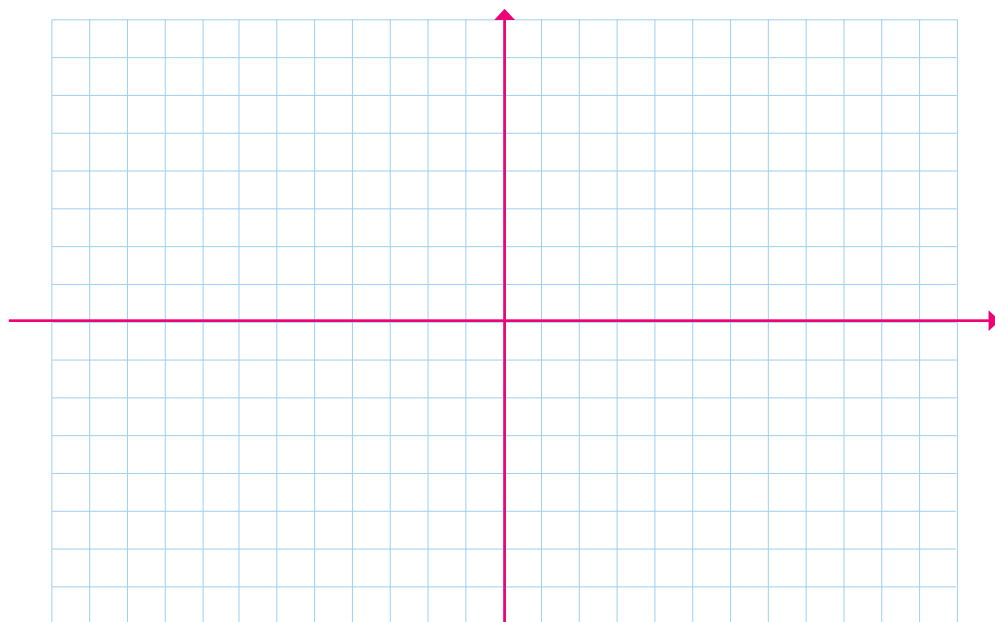
ب) جدول زیر را کامل کنید و به کمک آن نمودار سهمی به معادله $y=-\frac{1}{4}(x+2)^2+5$ را رسم کنید.

x	...	-5	-4	-3	-2	-1	0	1	...
y	...				5				...

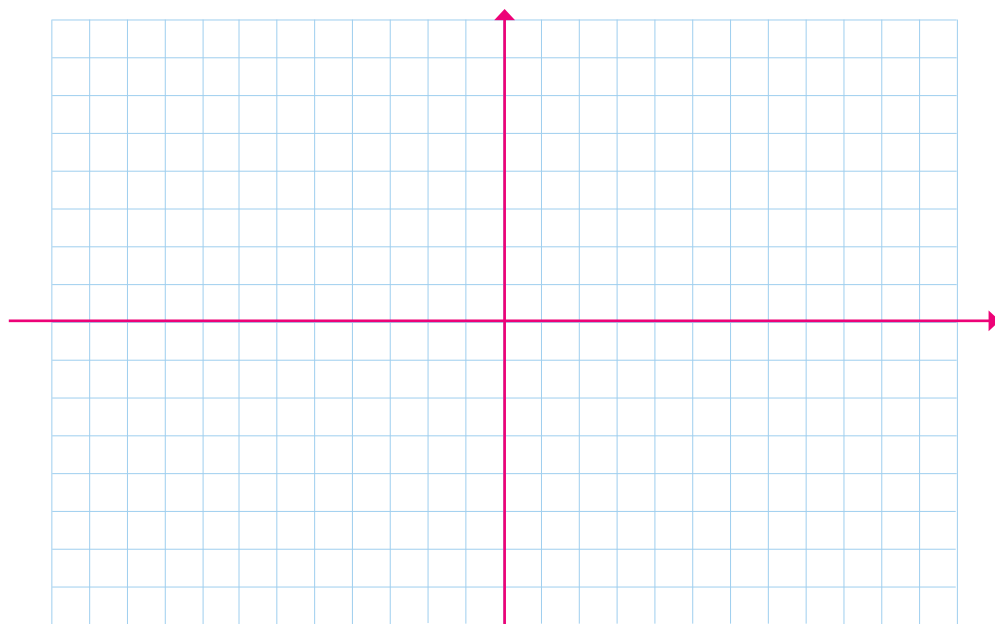




۱. نمودار توابع درجه دوم $y = -x^2 + 6x - 1$ و $y = 2x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.



۲. نمودار توابع $y = -x^2 + 6x + 1$ و $y = x^2 + 4x - 2$ را رسم کنید و در ادامه، مختصات برخورد این دو سهمی را مشخص کنید.

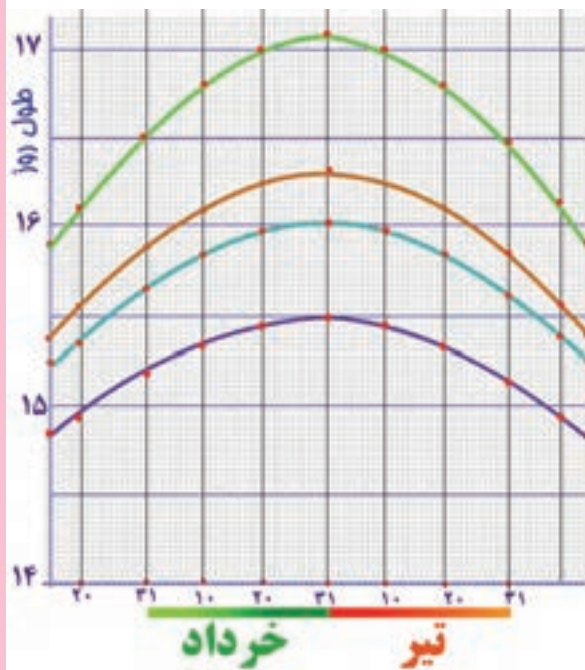




تمرین

۱. نمودار سهمی‌های $y = x^2 - 2x$ و $y = -(x-1)^2 + 1$ و $y = x^2 + 4x + 1$ را رسم کنید.
۲. اگر تابع درآمد به صورت $y = -\frac{1}{4}x^2 + 30x$ و تابع هزینه به صورت $y = 18x + 40$ باشد، ماکسیم مقدار سود را مشخص کنید.
۳. محیط مستطیلی ۲۶ متر است. اگر اندازه یکی از اضلاع آن را با x و مساحت آن را با s نشان دهیم، ابتدا نمودار تابع مساحت را بر حسب x رسم کنید. سپس به کمک نمودار مشخص کنید به ازای چه مقداری از x مساحت مستطیل ماکسیم می‌شود.
۴. اگر $2x + a = 100$ باشد x و a را طوری بیابید که $y = xa$ ماکسیم شود.
۵. در یک تولیدی، نوعی لامپ، برای مصارف پزشکی تولید می‌شود. این تولیدی هریک از لامپ‌ها را می‌تواند به قیمت ۲۰۰ تومان بفروشد. اگر در هر روز x واحد لامپ تولید کند و بفروشد و تابع هزینه آن برابر $c(x) = x^2 + 40x + 100$ باشد:
 - الف) تابع سود روزانه این تولیدی را بنویسید.
 - ب) چند لامپ در روز تولید کند تا بیشترین سود را داشته باشد؟
 - پ) بیشترین سود روزانه این کارگاه چقدر است؟

خواندنی



در روز ۳۱ خرداد، محور زمین در قطب شمال بیشترین انحراف به سمت خورشید را دارد. در این روز، خورشید در هنگام ظهر در بالاترین زاویه ممکن در آن محل قرار دارد. دقت کنید که روز ۳۱ خرداد طولانی‌ترین روز سال در نیم کره شمالی است. اما در عرض‌های بالاتر، این زمان بیشتر است. به عبارت دیگر هر چه به خط استوا نزدیک شویم، طول روز در ۳۱ خرداد عددی کوچک‌تر و هر چه از خط استوا دور شویم عدد بزرگ‌تری می‌باشد. نمودار مقابل نشان می‌دهد که طول روز در ایران در ایام خرداد ماه و تیرماه در شهرهای ایران چه اختلافی با هم دارند.

