

ریاضی دهم با طعم گلابی

فصل ۱ درس سوم : الگو و دنباله

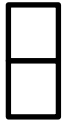


تالیف : مهندس حسین کاویانی

✓ پیش او مرده چند تا شکل بهت بدن و بگن شکل مرحله بعری بطوریه؟ قطعاً دنبال یک قاعده در آن هستی که بهش میگیم الگو!!!

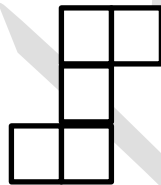
جمله عمومی الگو: جمله n ام الگو که در یک عدد طبیعی و دلخواه و شماره جمله (یا شماره شکل یا شماره مرحله) است را جمله عمومی یا جمله

n ام الگو می نامیم که معمولاً آن را با t_n ، a_n ، b_n و ... نشان می دهند که اندیس n همان شماره جمله است .



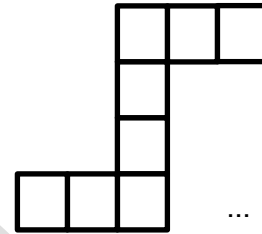
شکل (۱)

$$2 \times 4 - 2$$



شکل (۲)

$$2 \times 9 - 3$$

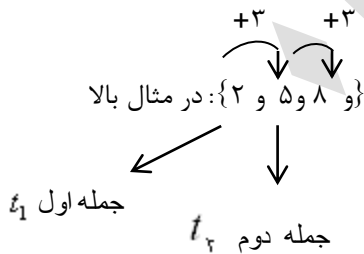


شکل (۳)

$$t_7 = 8$$

$$\dots \Rightarrow t_n = 3n - 1$$

دنباله: می توانیم جملات یک الگو را به صورت اعداد دنباله هم بنویسیم به آن دنباله می گوییم .



الگوی خطی: الگوهایی که اختلاف هر دو جمله متوالی آن مقدار ثابتی است .

یعنی با یک شیب ثابت در حال افزایش یا کاهش باشد را الگوی خطی می گوییم که جمله عمومی آنها در جه $t_n = an + b$ خطی به صورت است (مشابه خط $y = ax + b$)

که a ضریب n همان مقدار ثابت در حال زیاد یا کم شدن جملات دنباله است . (شیب)

مثال ۱ : دنباله $\{۳, ۵, ۸, ۱۱, \dots\}$ را در نظر بگیرید :

الف) آیا این دنباله (الگو) خطی است ؟

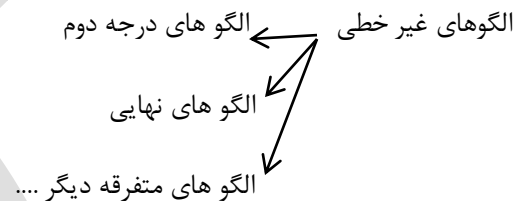
ب) سه جمله بعدی آن را بنویسید؟

ج) جمله عمومی این الگو را بدست آورید ؟ (دو روش)

د) جمله بیستم الگو کدام است ؟ (در شکل بیستم چند مربع داریم .)

ه) جمله چندم این الگو برابر ۸۹ است ؟ (در شکل چندم ۸۹ مربع داریم .)

- ✓ چند الگوی فطری دیگره واسه نمودت مثال بزین و جمله عمومی اونو پیدا کن و بعرض امتحان کن ببین درست یا نه ؟
- ✓ به دنباله مربوط به الگوی فطری ، دنباله حسابی گفته می شود که در درس چهارم به طور مفصل به آن می پردازیم .

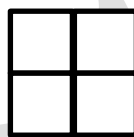


الگوهای غیر خطی درجه دوم : $t_n = an^2 + bn + c$

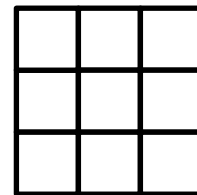
الف) الگوی مربعی : یک الگوی غیر خطی درجه دوم به صورت زیر است :



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

$t_n = n^2$ جمله عمومی (nام) $\Rightarrow \{1, 4, 9, 16, \dots\}$: دنباله مربعی با شروع از ۱



✓ دقت کنید در دنباله مربعی بالا افتلاف دو جمله متوالی مقدار ثابتی نیست پس دنباله (الگو) غیر فطی است.

$$۴ : دنباله مربعی با شروع از ۴ \Rightarrow \{1, 4, 9, 16, \dots\} \Rightarrow t_n = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1$$



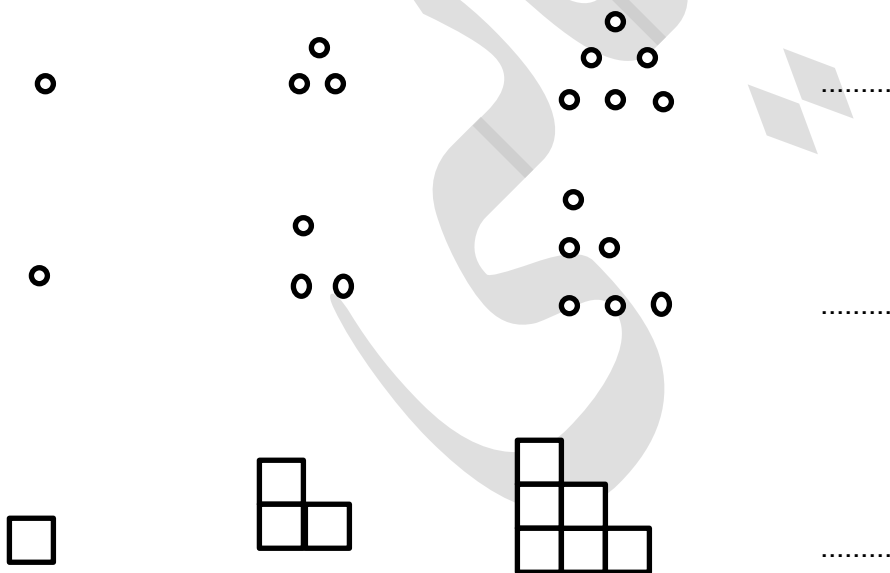
نکته خیلی مهم: در الگوهای درجه دوم $t_n = an^2 + bn + c$ ، دنباله خطی (حسابی) نیست یعنی با مقدار ثابتی افزایش (یا کاهش) نمی یابد. اما تفاضلات دو جمله متوالی تشکیل یک الگوی خطی می دهند که اگر شیب آن الگوی خطی تفاضلات را نصف کنیم همان ضریب n^2 یعنی a خواهد بود! ✓ برای درک بهتر نکته بالا و اثبات آن فیلم مربوطه را حتماً ببینید.

نکته: در الگوی مربعی از آنجا که دنباله تفاضلات جملات متوالی، یک الگوی خطی با شیب (قدر نسبت) ۲ تشکیل می دهند سپس ضریب n^2 نصف

$$\text{آن یعنی } \frac{2}{2} = 1 \text{ است!}$$

$$\begin{matrix} +5 & +7 \\ \swarrow & \searrow \\ \{4, 9, 16, \dots\} \Rightarrow t_n = (n+1)^2 = n^2 + 2n + 1 \end{matrix}$$

ب) الگوی مثلثی: به شکل های زیر دقت کنید و تعداد نقاط یا مربع ها را بشمارید.



$$t_1 = 1$$

$$t_2 = 1 + 2 = 3$$

$$t_3 = 1 + 2 + 3 = 6$$

مجموع n عدد متوالی با شروع از ۱

$$t_n = 1 + 2 + 3 + \dots + n \Rightarrow t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

↑ تعداد
↗ آخری
↘ اولی

الگوی مثلثی با شروع از ۱

$$\{1, 3, 6, 10, 15, \dots\} \Rightarrow t_n = \frac{n(n+1)}{2}$$

↘ +2
↘ +3
↘ +4
↘ +5

✓ سعی کنید جمله عمومی الگوهای مثلثی با شروع از صفر یا با شروع از ۳ را بدست آورید .

مثال ۲: با توجه به الگوی مثلثی شکل های بالا :

الف) در مرحله دهم چند نقطه داریم ؟

ب) در شکل مرحله پنجم ۱۲۰ نقطه وجود دارد ؟

ج) مجموع تعداد نقاط شکل دهم و یازدهم کدام است ؟

نکته: در الگوی غیر خطی درجه دوم مثلثی با شروع از ۱ به صورت $\{1, 3, 6, 10, \dots\}$ مجموع جملات متوالی n ام و $(n+1)$ ام تشکیل یک دنباله

مربعی با شروع از ۴ می دهند . $\{4, 9, 16, \dots\}$ یعنی $t_n + t_{n+1} = (n+1)^2$

نکته: اختلاف هر دو جمله متوالی دنباله مثلثی یک دنباله خطی (حسابی) تشکیل می دهد : $t_{n+1} - t_n = n + 1$

نکته: در الگوی مثلثی $\{1, 3, 6, 10, 15, \dots\}$ دنباله تفاضلات هر دو جمله متوالی یک الگوی خطی با قدر نسبت (شیب) یک واحد تشکیل می دهند

$\{2, 3, 4, 5, \dots\}$ که نصف آن یعنی $\frac{1}{2}$ همان ضریب n^2 در جمله عمومی الگوی مثلثی است .

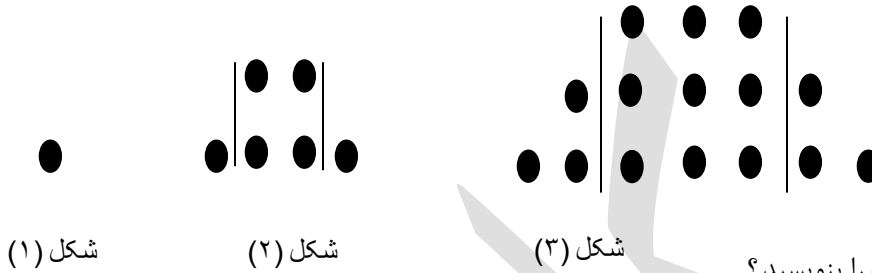
$$t_n = \frac{n(n+1)}{2} = \frac{n^2 + n}{2} = \frac{1}{2}n^2 + \frac{1}{2}n$$

الگوی مثلثی

یادآوری: در الگوی مربعی ضریب n^2 برابر ۱ بود اما در مثلثی برابر $\frac{1}{2}$ است .

ج (الگوهای ترکیبی مجموع مربعی و مثلثی

مثال ۳ : با توجه به الگوی شکل مقابل (یک مربعی و دو مثلثی)



شکل (۱)

شکل (۲)

شکل (۳)

الف (دنباله اعداد مربوط به تعداد نقاط در مراحل مختلف را بنویسید؟

ب (جمله عمومی (a_n) این الگو را بدست آورید؟ (تعداد نقاط در شکل n ام)

ج (در شکل دهم چند نقطه وجود دارد؟

د (دیگر الگوهای درجه دوم در حالت کلی :

مثال ۴ : جملات یک الگوی غیر خطی درجه دوم به صورت $\{-2, -2, 1, 7, 16, \dots\}$ است جمله بیستم دنباله کدام است؟

۵۱۲ (۴)

۵۱۱ (۳)

۵۱۰ (۲)

۵۰۰ (۱)

مثال ۵ : اعداد طبیعی فرد را به طریقی دسته بندی می کنیم که تعداد جملات در هر دسته برابر شماره ی آن دسته باشد :

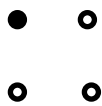
... و (۱ و ۹ و ۷) و (۳ و ۵) و (۱)

الف (جمله آخر دسته بیستم چند است؟ (کنکور تجربی ۸۴)

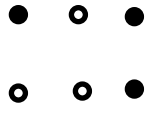
ب) جمله اول دسته بیستم چند است؟

ج (مجموع دو جمله اول و آخر دسته سی ام چند است؟ (کنکور تجربی ۹۴)

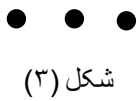
مثال ۶ : در الگوی شکل مقابل



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

الف (تعداد دایره های تو خالی سفید در شکل دوازدهم کدام است ؟ (کنکور انسانی ۸۸)

۷۸ (۴)

۷۲ (۳)

۶۶ (۲)

۵۵ (۱)

ب) تفاضل تعداد دایره های توپر در دو جمله دهم و یازدهم کدام است ؟ (کنکور انسانی ۸۶)

۲۱ (۴)

۱۹ (۳)

۱۷ (۲)

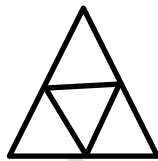
۱ صفر

* الگوهای غیر خطی نهایی : در این الگوها هر جمله از ضرب جمله قبلی در عددی ثابت بدست می آید به این الگوها که متغیر n در نما (توان) قرار دارد ، دنباله هندسی نیز می گوئیم که در درس ۴ به طور مفصل آموزش داده خواهد شد .

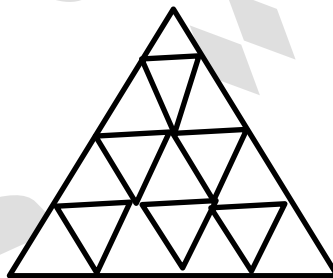
مثال ۷ : با توجه به الگوی شکل مقابل تعدا مثلث های کوچک در شکل n ام را بدست آورید . در شکل پنجم چند مثلث وجود دارد ؟



شکل (۱)



شکل (۲)



شکل (۳)

* الگو و دنباله در حالت کلی : n شماره جمله و a_n مقدار جمله n ام است .

مثال ۸ : دنباله $a_n = (-1)^n \frac{2n+3}{n+4} n \in \mathbb{N}$ را در نظر بگیرید :

الف) چهار جمله اول آن را بنویسید ؟

ب) جمله چندم آن $\frac{-5}{3}$ است ؟

مثال ۹ : جمله $(2n-1)$ ام دنباله ای به صورت $4n^2 - 4n + 3$ است :

الف) جمله پنجم دنباله کدام است ؟

ب) جمله n ام دنباله کدام است ؟

* **دنباله های بازگشتی** : هر گاه یک جمله را بر حسب جملات بعدی یا قبلی بیان کنیم به آن فرم بازگشتی می گوئیم . در این الگوها جمله n ام بر حسب جملات بعدی $(n+1)$ ام و $(n+2)$ ام یا جملات قبلی $(n-1)$ ام و $(n-2)$ ام بیان می شود و مقدار یک یا دو جمله از دنباله نیز داده می شود که می توان بقیه جملات و گاهی جمله عمومی را بدست آورد .

مثال ۱۰ : دنباله $a_n = n^2 - 15n - 250$ چند جمله منفی دارد ؟

۲۵(۴)

۲۴(۳)

۳۴(۲)

۳۵(۱)

مثال ۱۱ : در یک دنباله اعداد $a_1 = 1$ و برای هر $n \geq 2$ داریم : $a_n = 2a_{n-1} + 1$ جمله هشتم این دنباله کدام است ؟ (کنکور تجربی ۹۵ داخل کشور)

۲۵۵(۴)

۲۴۷(۳)

۱۵۹(۲)

۱۲۷(۱)

مثال ۱۲ : دنباله فیوناتچی به صورت $F_1 = F_2 = 1, F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$ را در نظر بگیرید ، جمله هفتم این دنباله کدام است ؟

۱۵ (۴)

۲۱ (۳)

۱۳ (۲)

۸ (۱)

مثال ۱۳ : در یک دنباله با جمله n ام a_n داریم : $a_1 = 1, a_{n+1} = a_n + (n+1)$

الف (جمله هشتم کدام است ؟ (انسانی ۹۱ خارج)

ب) جمله عمومی دنباله را مشخص کنید .

ج) جمله سی ام دنباله را بدست آورید؟