

ش صندلی :	نام و نام خانوادگی:	کلاس: چهارم	زمان امتحان: ۶۰ دقیقه
رشته: تجربی	درس: ریاضی	تعداد صفحات: ۲	تاریخ امتحان: ۹۳/۱۰/۲۰

بارم ۱	۱. در آزمایشگاهی ۵ موش سفید و ۳ موش سیاه نگهداری می شود به تصادف متوالیاً سه موش از میان آن ها انتخاب می کنیم. با کدام احتمال اولین موش سفید و سومین موش سیاه است؟
۱	۲. احتمال جوانه زدن نوعی لوبیا ۰/۸ است. اگر ۷ دانه بکاریم، احتمال آن را حساب کنید که لااقل ۶ دانه جوانه بزند.
۲	۳. در پرتاب دو تاس اگر متغیر تصادفی $X$ بیانگر مجموع دو تاس باشد، اولاً $X$ چه مقادیری دارد؟ ثانیاً $P(۳ \leq X \leq ۵)$ را حساب کنید.
۱	۴. اگر $\alpha$ و $\beta$ ریشه های معادله $۰ = ۴ - ۳x - ۲x^۲$ باشند، معادله ای بنویسید که ریشه هایش $(\frac{1}{\alpha} + ۱)$ و $(\frac{1}{\beta} + ۱)$ باشند.
۱	۵. به ازای کدام مقدار $a$ نقطه $Min$ نمودار تابع $y = ax^۲ - \sqrt{۲}x + a$ بر روی خط $y = ۱$ واقع است؟
۱	۶. نامعادله $ x - ۲  < x^۲ - ۲x$ را حل کنید.
۱	۷. معادله $۱۲ = [x - ۶ + ۵[x]]$ را حل کنید.
۱	۸. اگر $۷۲ = ۲^x + ۴^x = ۲ + \log(x + ۱) + \log(۲y + x^۲)$ مقدار $y$ کدام است؟
۱/۵	۹. اگر $۱۶ = e^{۲x} + ۶e^x$ حاصل $\frac{\ln(۶+e^x)}{x}$ کدام است؟
۱	۱۰. در یک نوع کشت باکتری تعداد باکتری ها بعد از $t$ دقیقه به صورت $f(t) = Ae^{Kt}$ می باشد. اگر تعداد باکتری ها در شروع کشت ۸۰۰ باشد و در دقیقه ۲۰ ام تعداد برابر ۳۲۰۰ باشد. تعداد باکتری ها در دقیقه ۳۰ ام کدام است؟

۱	۱۱. اگر $f(x) = \frac{x+1}{x-1}$ و $f \circ g(x) = \frac{x^2+2}{x^2+1}$ حاصل $g(1)$ کدام است؟
۱/۵	۱۲. اولاً نشان دهید تابع $f(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$ معکوس پذیر است. ثانیاً معکوس آن را پیدا کنید.
۱	۱۳. در یک تصاعد هندسی مجموع هشت جمله اول $\frac{5}{4}$ مجموع چهار جمله اول است. جمله هفتم چند برابر جمله اول است؟
۱	۱۴. همگرایی و یکنوایی دنباله $a_n = 1 + \frac{(-1)^n}{n}$ را بررسی کنید.
۱	۱۵. حاصل $\lim_{n \rightarrow +\infty} \left( \frac{2n+3}{2n+1} \right)^{5n+1}$ حد را بدست آورید.
۱	۱۶. جواب کلی معادله مثلثاتی $2 \sin(\pi - x) \cos\left(\frac{3\pi}{2} + x\right) + 3 \cot x \sin(\pi + x) = 0$ کدام است؟
۱	۱۷. اگر $f(x) = x \sin \pi x $ مطلوب است $f + \dot{f}$ .
۱	۱۸. اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \sqrt[3]{(2x+6)} & x > 1 \\ ax+b & x \leq 1 \end{cases}$ در $x=1$ مشتق پذیر باشد $b$ کدام است؟
۲۰	جمع نمره

زمان امتحان: ۶۰ دقیقه	کلاس: چهارم	راهنمای تصحیح درس: ریاضی
تاریخ امتحان: ۹۳/۱۰/۲۰	تعداد صفحات: ۳	رشته: تجربی

دومی سفید ——— اولین موش سفید (۱)

دومی سیاه      سومی سیاه

$$\left(\frac{5}{8} \times \frac{4}{7} \times \frac{3}{6}\right) + \left(\frac{5}{8} \times \frac{3}{7} \times \frac{2}{6}\right)$$

$$2) \binom{7}{6} (0/8)^2 (0/2) + \binom{7}{7} (0/8)^7$$

$$3) P(x=3) + P(x=4) + P(x=5)$$

$$\frac{2}{36} + \frac{3}{36} + \frac{4}{36}$$

$$4) \alpha + \beta = \frac{3}{2}$$

$$\alpha\beta = -2$$

$$S_{new} = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) + \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{\alpha + \beta}{\alpha\beta} + 2 = \frac{\frac{3}{2}}{-2} + 2 = -\frac{3}{4} + 2 = \frac{5}{4}$$

$$P_{new} = \left(\frac{1}{\alpha} + 1\right) \left(\frac{1}{\beta} + 1\right) = \frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + 1 = -\frac{1}{2} + \left(-\frac{3}{4}\right) + 1 = \frac{-2-3+4}{4} = -\frac{1}{4}$$

$$x^2 - Sx + p = 0 \rightarrow x^2 - \frac{5}{4}x - \frac{1}{4} = 0$$

5)

$$-\frac{\Delta}{4a} = 1 \rightarrow \Delta = -4a \rightarrow 8 - 4a^2 = -4a$$

$$2 - a^2 = -a \rightarrow a^2 - a - 2 = 0 \begin{cases} a = -1 \\ a = 2 \end{cases}$$

6)

$$x \geq 2 \rightarrow x^2 - 2x < x - 2 \rightarrow x^2 - 3x + 2 < 0 \rightarrow (1, 2)$$

$$x \geq 2 \cap (1, 2) \rightarrow \emptyset$$

$$x < 2 \rightarrow x^2 - 2x < -x + 2 \rightarrow |x^2 - 2x - 2| < 0 \rightarrow (-1, 2)$$

$$x < 2 \cap (-1, 2) \rightarrow (-1, 2)$$

$$7) [x] - 6 + 5[x] = 12 \rightarrow 6[x] = 18 \rightarrow [x] = 3 \rightarrow 3 \leq x < 4$$

$$8) (2^x)^2 + 2^x = 72 \rightarrow t^2 + t - 72 = 0 \rightarrow (t-8)(t+9) = 0 \begin{cases} t = 8 \\ t = -9 \end{cases}$$

$$2^x = 8 \rightarrow x = 3$$

$$\rightarrow \log 4 + \log(2y+9) = 2 \rightarrow \log 4(2y+9) = 2 \rightarrow 4(2y+9) = 100 \rightarrow 2y+9 = 25 \rightarrow y = 8$$

$$9) (e^x)^2 + 6e^x - 16 = 0 \rightarrow t^2 + 6t - 16 = 0 \rightarrow (t-2)(t+8) = 0$$

$$t = 2, t = -8 \rightarrow e^x = 2 \rightarrow \ln e^x = \ln 2 \rightarrow x = \ln 2$$

$$\frac{\ln(6+e^2)}{x} = \frac{\ln(6+2)}{\ln 2} = \frac{\ln 8}{\ln 2} = 3$$

$$10) f(t) = 800e^{kt}$$

$$3200 = 800e^{20k} \rightarrow e^{20k} = 4$$

$$f(30) = 800e^{30k} = 800(e^{20k})^{\frac{3}{2}} = 800 \times 4^{\frac{3}{2}} = 6400$$

$$11) f(g(x)) = \frac{g(x)+1}{g(x)-1} = \frac{x^2+2}{x^2+1} \rightarrow \frac{g(1)+1}{g(1)-1} = \frac{3}{2}$$

$$3g(1)-3 = 2g(1)+2 \rightarrow g(1) = 5$$

$$12) f(x_1) = f(x_2) \Rightarrow x_1 = x_2$$

$$\frac{2^{x_1}+1}{2^{x_1}-1} = \frac{2^{x_2}+1}{2^{x_2}-1} \rightarrow x_1 = x_2$$

$$y = \frac{2^x+1}{2^x-1} \rightarrow y 2^x - y = 2^x + 1 \rightarrow y 2^x - 2^x = y + 1$$

$$2^x (y-1) = y+1 \rightarrow 2^x = \frac{y+1}{y-1} \rightarrow x = \log_2 \frac{y+1}{y-1}$$

$$f^{-1}(x) = \log_2 \frac{y+1}{y-1}$$

$$13) s_8 = \frac{5}{4} s_4 \rightarrow \frac{a_1(1-q^8)}{1-q} = \frac{5}{4} \frac{a_1(1-q^4)}{1-q}$$

$$(1-q^4)(1+q^4) = \frac{5}{4}(1-q^4) \rightarrow q^4 = \frac{1}{4} \rightarrow q = \pm \sqrt{\frac{1}{2}}$$

$$\frac{a_7}{a_1} = \frac{a_1 q^6}{a_1} = q^6 = \frac{1}{8}$$

$$14) \lim_{n \rightarrow +\infty} a_n = \lim_{n \rightarrow +\infty} 1 + \frac{(-1)^n}{n} = 1 + \frac{\pm 1}{+\infty} = 1 + 0 = 1$$

$$a_1 = 0 \quad a_2 = 1 + \frac{1}{2} \quad a_3 = 1 - \frac{1}{3}$$

$$15) \lim_{n \rightarrow +\infty} \left(1 + \frac{2}{2n+1}\right)^{5n+1} = e^{\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{10n+2}{2n+1}} = e^5$$

$$16) 2\sin^2 x + 3 \frac{\cos x}{\sin x} (-\sin x) = 0$$

$$2\sin^2 x - 3\cos x = 0 \rightarrow 2(1 - \cos^2 x) - 3\cos x = 0$$

$$-2\cos^2 x - 3\cos x + 2 = 0 \rightarrow \cos x = \frac{3 \pm 5}{-4} \begin{cases} -2 \\ 1 \\ 2 \end{cases}$$

$$\cos x = \cos \frac{\pi}{3} \rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3}$$

$$17) f'_+(1) \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{f(x)+f(1)}{x-1} = \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{x |\sin \pi x|}{x-1} = \frac{0}{0}$$

$$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-x \sin \pi x}{x-1} = \frac{0}{0} \xrightarrow{\text{Hop}} \lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{-\sin \pi x + (\pi \cos \pi x)(-x)}{x-1} = \pi$$

$$18) \lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = f(1)$$

$$4 = a + b$$

$$f'(x) = \begin{cases} \frac{2(2)}{3\sqrt[3]{2x+6}} & x > 1 \\ a & x \leq 1 \end{cases} \rightarrow f'_{(1^+)} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}, f'_{(1^-)} = a \quad a = \frac{2}{3}$$

$$a + b = 4$$

$$\frac{2}{3} + b = 4 \rightarrow b = 4 - \frac{2}{3} = \frac{10}{3}$$