

به نام داناتی توانا
اداره آموزش و پرورش ناحیه مشهد

نام و نام خانوادگی:

مدت پاسخگویی: ۱۰۰ دقیقه

شماره صندلی:

تاریخ امتحان: ۹۱/۲۰/۲۸

نام دبیر: آقای مسعودی

نام امتحان: هندسه تحلیلی

پایه - رشته:

دبیرستان و پیش دانشگاهی غیرانتفاعی پسرانه علامه

شماره کلاس:

نمره:

تعداد صفحه:

امتحانات نوبت دوم

۱- زاویه‌هایی که بردار $\sqrt{2}i + j + k$ با محورهای مختصات می‌سازند را بیابید. (۰/۵ نمره)

۲- بردارهای \vec{a} و \vec{b} و \vec{c} به طول واحد هستند به طوری که $a + b + c = 0$ اندازه حاصل ضرب خارجی دو بردار $\vec{a} + 2\vec{b}$ و $2\vec{a} - \vec{b}$ را بیابید. (۱/۵ نمره)

۳- فاصله نقطه $p(2, 1, -1)$ را از خط $\begin{cases} y + 2x = 0 \\ 3x - z = 4 \end{cases}$ بیابید. (۱/۵ نمره)

۴- طول وتری را که خط $3x - 4y + 8 = 0$ از دایره $x^2 + y^2 - 2x + 2y - 23 = 0$ جدا می‌کند را بیابید. (۱/۵ نمره)

۵- معادله هذلولی را بنویسید که $3x + 4y = 7$ و $3x - 4y = -1$ مجانب‌های آن و $F \left| \frac{6}{1} \right.$ یکی از کانون‌های آن باشد؟ (۱/۵ نمره)

۶- معادله سهمی $y^2 - 4x - 4y = 0$ را رسم کنید و کانون و رأس آن را به دست آورید. (۱/۵ نمره)

۷- نوع مقطع مخروطی $x^2 + xy + y^2 = 1$ را با استفاده از دوران تعیین کنید؟ (۱/۵ نمره)

۸- حاصل عبارت $\begin{bmatrix} \sqrt{3} & -1 \\ 1 & \sqrt{3} \end{bmatrix}^{600}$ را به دست آورید؟ (۲ نمره)

۹- با استفاده از ویژگی‌های دترمینان ثابت کنید؟ (۲ نمره) $\begin{vmatrix} 2+x & y & z \\ x & 2+y & z \\ x & y & 2+z \end{vmatrix} = 4(2+x+y+z)$

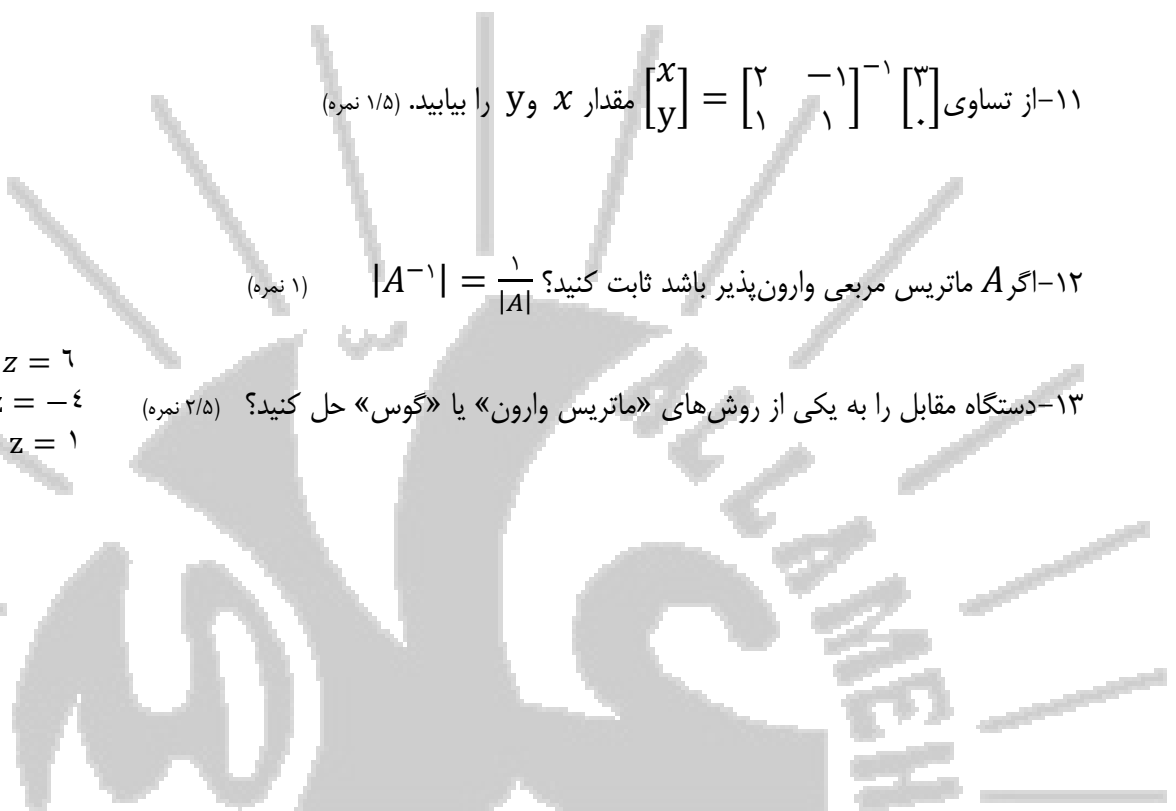
۱۰- اگر A ماتریس مربعی متقارن و B ماتریس پاد متقارن باشد ثابت کنید $AB + BA$ پاد متقارن است؟ (۲ نمره)

۱۱- از تساوی $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} 3 \\ 4 \end{bmatrix}$ مقدار x و y را بیابید. (۱/۵ نمره)

۱۲- اگر A ماتریس مربعی وارون پذیر باشد ثابت کنید؟ $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$ (۱ نمره)

$$\begin{cases} x + y + z = 6 \\ x - y - z = -4 \\ 2x + y - z = 1 \end{cases}$$

۱۳- دستگاه مقابل را به یکی از روش‌های «ماتریس وارون» یا «گوس» حل کنید؟ (۲/۵ نمره)



پاسخنامه هندسه تحلیلی

-۱

$$|a| = \sqrt{2+1+1} = \sqrt{4} = 2$$

$$e_a = \left(\frac{\sqrt{2}}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \right)$$

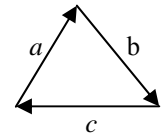
$$\alpha = 45$$

$$\beta = 60$$

$$\gamma = 60$$

-۲

$$|(a + 2b) \times (2a - b)| = \left| \underbrace{a \times 2a}_{\cdot} - a \times b + 2b \times a - \underbrace{2b \times b}_{\cdot} \right|$$



$$= \Delta |b \times a| = \Delta |b| |a| \sin(a, b) = \Delta \times 1 \times 1 \times \left(\frac{\sqrt{3}}{2} \right) = \frac{\Delta \sqrt{3}}{2}$$

-۳

$$\begin{cases} x = t \\ y = -2t \\ z = 3t - \epsilon \end{cases} \quad \begin{matrix} p. = (0, 0, -\epsilon) \\ p. = (2, 1, -1) \\ p.p. = (2, 1, 3) \end{matrix} \quad u = (1, -2, 3)$$

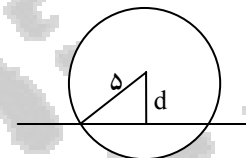
$$d = \frac{|p.p. \times u|}{|u|} = \frac{\sqrt{81 + 9 + 20}}{\sqrt{1 + 4 + 9}} = \frac{\sqrt{110}}{\sqrt{14}}$$

-۴

$$c \begin{vmatrix} 1 \\ -1 \end{vmatrix}$$

$$R = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{4 + 4 + 92} = \Delta$$

$$d = \frac{3 + \epsilon + 8}{\sqrt{9 + 16}} = \frac{10}{5} = 2$$



$$\frac{a}{\sqrt{2}} = \sqrt{20 - 9} \rightarrow \frac{a}{\sqrt{2}} = \epsilon \Rightarrow \boxed{a = 8}$$

۵- هذلولی افقی

$$\begin{cases} 3x + \epsilon y = 7 \\ 3x - \epsilon y = -1 \end{cases}$$

$$3x = 6 \rightarrow c \begin{cases} \alpha = 1 \\ \beta = 1 \end{cases}$$

$$a + c = 6$$

$$1 + c = 6$$

$$c = 5$$

$$b^2 = c^2 - a^2$$

$$\frac{9}{16} a^2 = a^2 - 20$$

$$a^2 + \frac{9}{16} a^2 = 20$$

$$a^2 = 16 \Rightarrow a = 4, b = 3$$

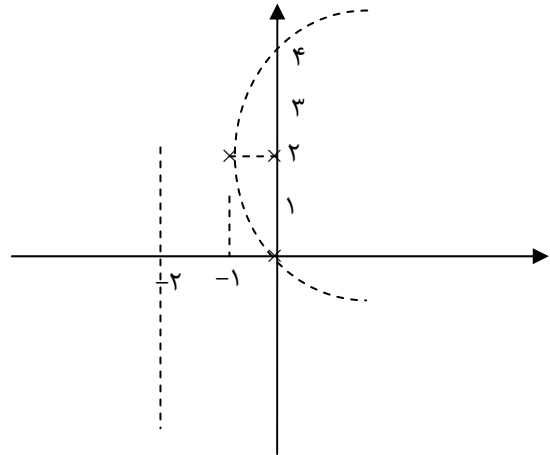
$$\Rightarrow \frac{(x-1)^2}{16} - \frac{(y-1)^2}{9} = 1$$

$$y^2 - 4y + 4 - 4 = 4x$$

$$(y - 2)^2 = 4(x + 1)$$

$$SS \left| \begin{matrix} - \\ r \end{matrix} \right. \quad 4a = 4 \Rightarrow a = 1$$

$$F \left| \begin{matrix} \cdot \\ r \end{matrix} \right.$$



-6

$$\tan 2\theta = \frac{1}{2} \quad \text{تعریف نشده} \quad 2\theta = 90 \Rightarrow \theta = 45$$

$$\begin{cases} x = \frac{\sqrt{r}}{r}x' - \frac{\sqrt{r}}{r}y' \\ y = \frac{\sqrt{r}}{r}x' + \frac{\sqrt{r}}{r}y' \end{cases} \Rightarrow \left(\frac{\sqrt{r}}{r}x - \frac{\sqrt{r}}{r}y\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{r}}{r}x + \frac{\sqrt{r}}{r}y\right)^2 = 1$$

$$\rightarrow \frac{r}{r}x^2 + \frac{r}{r}y^2 - \frac{r}{r}x^2 + \frac{r}{r}y^2 + \frac{r}{r}x^2 + \frac{r}{r}y^2 = 1$$

$$\frac{r}{r}x^2 + \frac{r}{r}y^2 = 1 \quad \text{بیضی است}$$

$$(r)^{r \cdot} \begin{bmatrix} \frac{\sqrt{r}}{r} & -\frac{1}{r} \\ \frac{1}{r} & \frac{\sqrt{r}}{r} \end{bmatrix} = r^{r \cdot} \begin{bmatrix} \cos 30^\circ & -\sin 30^\circ \\ \sin 30^\circ & \cos 30^\circ \end{bmatrix}$$

$$= r^{r \cdot} \begin{bmatrix} \cos 180^\circ & -\sin 180^\circ \\ \sin 180^\circ & \cos 180^\circ \end{bmatrix}$$

$$= r^{r \cdot} \begin{bmatrix} +1 & \cdot \\ \cdot & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} r^{r \cdot} & \cdot \\ \cdot & -r^{r \cdot} \end{bmatrix}$$

-9

$$\begin{vmatrix} r+x+y+z & y & z \\ r+x+y+z & r+y & z \\ r+x+y+z & y & r+z \end{vmatrix} = (r+x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ 1 & r+y & z \\ 1 & y & r+z \end{vmatrix}$$

$$= (r+x+y+z) \begin{vmatrix} 1 & y & z \\ \cdot & r & \cdot \\ \cdot & \cdot & r \end{vmatrix}$$

$$= 4(r+x+y+z)$$

-10

$$s^T = (AB + BA)^T = (AB)^T + (BA)^T = B^T A^T + A^T B^T$$

$$= -BA - Ab = -(BA + Ab) = -S$$

-۱۱

$$\Delta = \gamma + \lambda = \gamma$$

$$\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -1 & \gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \gamma \\ \gamma \end{bmatrix} = \frac{1}{\gamma} \begin{bmatrix} \gamma \\ -\gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

-۱۲

$$AA^{-1} = I \rightarrow |AA^{-1}| = |I|$$

$$|AA^{-1}| = \lambda \Rightarrow |A^{-1}| = \frac{\lambda}{|A|}$$

-۱۳

$$x = 1 \quad y = -1 \quad z = \gamma$$

