



۱- بین هر دو رأس از گراف G دقیقاً یک مسیر وجود دارد. اگر این گراف شامل ۷ رأس از درجه یک و ۵ رأس از درجه ۲ و k رأس از درجه ۳ باشد، مقدار k را بیابید.

۲- در یک گراف کامل از مرتبه ۵، چند دور با طول ۴ وجود دارد؟

۳- معادله سیاله خطی $7x + 5y = 130$ در مجموعه اعداد طبیعی چند جواب دارد؟

۴- به ازای چند عدد طبیعی دو رقمی n ، دو عدد به صورت‌های $5n - 2$ و $7n + 3$ نسبت به هم غیر اول‌اند؟

۵- عدد شش رقمی $\overline{a63b29}$ بر عدد ۹۹ بخش پذیر است، رقم a کدام است؟

۶- چند دسته ۳ تایی گل از ۵ نوع گل مختلف می‌توان ساخت؟ (تکرار مجاز است.)

۷- چند عدد سه رقمی وجود دارد که در آن‌ها هر یک از رقم‌های ۳ و ۶، حداقل یک بار، ظاهر شوند؟

۸- اگر M ماتریس متناظر از یک رابطه روی مجموعه ۴ عضوی باشد، این رابطه کدام یک از خواص بازتابی تقارنی تراگذری یا پادتقارنی را دارد؟

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

۹- تعداد رابطه های روی مجموعه $\{a, b, c, d\}$ با ویژگی‌های بازتابی و متقارن و شامل (a, b) و (a, c) را بیابید.

۱۰- از ۴ دانش‌آموز سال اول و ۵ دانش‌آموز سال دوم ۶ نفر به تصادف برای شرکت در یک اردو انتخاب شده‌اند. احتمال آن که ۲ نفر از سال اول و ۴ نفر از سال دوم انتخاب شوند چیست؟

۱۱- دو ظرف همانند، اولی دارای ۶ مهره سفید و ۴ مهره سیاه و دومی دارای ۶ مهره سفید و ۸ مهره سیاه است. با چشم بسته یکی از این دو ظرف را اختیار کرده و مهره‌ای از آن بیرون می‌آوریم. مطلوب است احتمال اینکه مهره انتخاب شده سفید باشد.

۱۲- تابع احتمال به صورت $P(X = x) = \frac{\binom{5}{x}}{A}$ ؛ $x = 0, 1, 2, 3, 4, 5$ تعریف شده است. با محاسبه‌ی عدد A ، مقدار $P(X = 2 \text{ یا } 3)$ را بیابید.

۱۳- اگر A و B دو پیشامد از فضای نمونه‌ای S باشند، به طوری که $P(A) = 0/2$ و $P(B) = 0/22$ و $P(B|A) = 0/7$ آنگاه مقدار $P(B'|A')$ را بیابید.

۱- گرافی که بین هر دو راس آن دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد، درخت است:

$$\sum \text{deg} v_i = 2q = 2(p-1)$$

$$\Rightarrow 7 \times 1 + 5 \times 2 + k \times 3 = 2(7+5+k-1) \Rightarrow k=5$$

۲- تعداد دورهای به طول m در گراف K_p برابر است با:

$$\binom{p}{m} \times \frac{(m-1)!}{2}$$

$$\binom{5}{4} \times \frac{(4-1)!}{2} = 15$$

$$7x + 5y = 130 \Rightarrow 5y = -7x + 130 \Rightarrow y = -x + 26 - \frac{2x}{5}$$

$$\left. \begin{array}{l} y = -x + 26 - \frac{2x}{5} \\ x = 5k \end{array} \right\} \Rightarrow \text{فرض: } \frac{2x}{5} = 2k \Rightarrow x = 5k$$

$$y = 26 - vk \Rightarrow \begin{cases} k=1 \Rightarrow x=5, y=19 \\ k=2 \Rightarrow x=10, y=12 \\ k=3 \Rightarrow x=15, y=5 \end{cases}$$

۴-

$$d = (\overbrace{7n+3}^{(-)}, \overbrace{5n-2}^{(-2) \times}) = (\overbrace{5n-2}^{(-2) \times}, \overbrace{2n+5}^{(-2) \times}) = (2n+5, n-12)$$

$$= (n-12, 29) \neq 1 \Rightarrow n-12 = 29k \Rightarrow n = 29k + 12$$

$$9 < n \leq 99 \Rightarrow 9 < 29k + 12 \leq 99 \Rightarrow -3 < 29k \leq 87$$

برای این n که دو رقمی باشد باید:

$$\Rightarrow 0 < k \leq 3 \Rightarrow k = 0 \text{ یا } 1 \text{ یا } 2 \text{ یا } 3 \Rightarrow \text{تعداد } k \text{ ی قابل قبول} = 4$$

۵- گزینه ۱ پاسخ صحیح است. توجه

$$a \equiv_{mk} b \Rightarrow a \equiv_m b$$

$$\begin{cases} \overline{a63b29} \equiv_{11} 0 \Rightarrow 9-2+b-3+6-a \equiv_{11} 0 \Rightarrow b-a \equiv_{11} 1 \Rightarrow b-a=1 \\ \overline{a63b29} \equiv_9 0 \Rightarrow a+6+3+b+2+9 \equiv_9 0 \Rightarrow a+b+2 \equiv_9 0 \Rightarrow a+b=7 \text{ یا } 16 \end{cases}$$

$a=3$ و $b=4$ قابل قبول است.

۶- نکته: k نوع گل مختلف را اگر بخواهیم در n دسته قرار دهیم، تعداد دسته‌ها برابر است با: $\binom{n+k-1}{k-1}$

بنابراین $\binom{5+3-1}{3} = \binom{7}{3} = 35$

۷-

تعداد سه رقمی فاقد ۳ یا ۶: $8 \times 9 \times 9 + 8 \times 9 \times 9 - 7 \times 8 \times 8$

کل اعداد سه رقمی: $9 \times 10 \times 10$

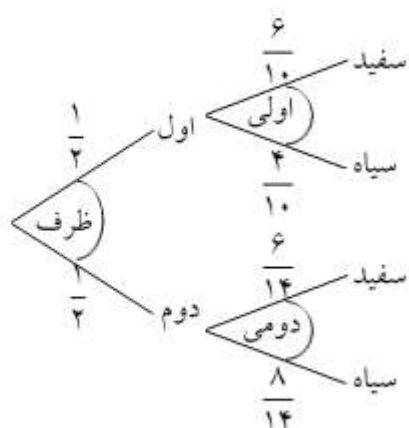
$$9 \times 10 \times 10 - [8 \times 9 \times 9 + 8 \times 9 \times 9 - 7 \times 8 \times 8] = 900 - 848 = 52$$

۸- چون همه‌ی درایه‌های قطر اصلی ۱ می‌باشد، رابطه بازتابی است از طرفی چون بسته‌های $\{a, b\}$ و $\{a, c\}$ داریم پس تقارنی و پادتقارنی نداریم.

۹- چون رابطه‌های مورد نظر دارای خاصیت بازتابی هستند، پس حتماً باید شامل اعضای (a, a) و (b, b) و (c, c) و (d, d) باشند. طبق تعریف خاصیت تقارنی، چون (a, b) و (a, c) در رابطه‌ها هستند، پس (b, a) و (c, a) نیز باید در رابطه‌های مورد نظر باشند. پس چهار جفت زوج مرتب دیگر موجود می‌باشد که تعداد زیرمجموعه‌های آنها برابر با $2^4 = 16$ می‌باشد. این تعداد، همان تعداد رابطه‌های ممکن با شرط داشتن روابط بازتابی و تقارنی روی مجموعه داده شده می‌باشند.

-۱۰

$$P = \frac{\binom{4}{2} \times \binom{5}{4}}{\binom{9}{6}} = \frac{5}{14}$$



$$\Rightarrow \text{احتمال سفید بودن} = \frac{1}{2} \left(\frac{6}{10} + \frac{6}{14} \right) = \frac{18}{35}$$

$$P(X=0) + P(X=1) + \dots + P(X=5) = 1 \rightarrow \frac{1}{A} + \frac{5}{A} + \frac{10}{A} + \frac{10}{A} + \frac{5}{A} + \frac{1}{A} = 1 \rightarrow A = 32$$

$$P(X=2 \text{ یا } 3) = \frac{10}{A} + \frac{10}{A} = \frac{20}{32} = \frac{5}{8}$$

$$P(B | A) = \frac{P(A \cap B)}{P(A)} \Rightarrow P(A \cap B) = 0.2 \times 0.7$$

$$P(B' | A') = \frac{P(A' \cap B')}{P(A')} \Rightarrow \frac{1 - (P(A) + P(B) - P(A \cap B))}{1 - P(A)} = \frac{1 - (0.2 + 0.22 - 0.14)}{1 - 0.2} = 0.9$$