



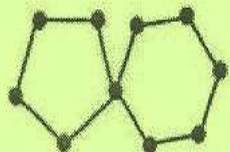
دانش آموز عزیز شما می توانید پاسخنامه امتحان را دو ساعت پس از پایان امتحان در پورتال مدرسه مشاهده نمایید.

www.bagheralolum.sch.ir

- ۱- با پنج رأس a, b, c, d و e چند گراف ساده با سه یال می توان ساخت که یکی از یالها bd باشد؟ (۱۱۵)
- ۲- در گراف ساده G از مرتبه 10 ، $\delta = 2$ و $\Delta = 4$ است. حداقل اندازه ی این گراف چیست؟ (۱۱۵)
- ۳- U و V دو رأس متمایز از گراف K_7 می باشد. چند مسیر به طول 3 از U به V در آن گراف وجود دارد؟ (۱)
- ۴- به گراف 3 -منتظم از مرتبه 6 چند یال اضافه کنیم تا گراف K_6 به دست آید؟ (۱۱۵)
- ۵- گرافی از مرتبه 10 ناهمبند است، گراف حداکثر چند یال می تواند داشته باشد؟ (۱)
- ۶- در یک درخت از مرتبه 9 چند مسیر با طول بزرگتر یا مساوی یک یافت می شود؟ (۱)
- ۷- بین هر دو رأس از گراف G دقیقاً یک مسیر وجود دارد. اگر این گراف شامل 7 رأس از درجه یک و 5 رأس از درجه 2 و k رأس از درجه 3 باشد، k کدام است؟ (۱۱۵)
- ۸- چند نقطه با مختصات صحیح بر منحنی به معادله $xy - y + x^2 - 3x = 0$ وجود دارد؟ (۱)
- ۹- اگر $d = (5a + 4, 2a + 3)$ ، مقدار d رایباید. (۱)
- ۱۰- اگر عدد $17p + 1$ مربع کامل باشد، چند عدد اول p در آن صدق می کند؟ (۱)
- ۱۱- تعداد عضوهای مجموعه $\{n : 65 \mid 2^n + 1\}$ از مجموعه اعداد طبیعی کمتر از 100 کدام است؟ (۱)
- ۱۲- نسبت دو عدد صحیح $\frac{4}{9}$ و کوچکترین مضرب مشترک آنها 612 است، بزرگترین مقسوم علیه مشترک آنها کدام است؟ (۱)
- ۱۳- رقم یکان $7^{40} + 13^{30}$ چیست؟ (۱)
- ۱۴- عدد شش رقمی $\overline{a63b29}$ بر عدد 99 بخش پذیر است، رقم a کدام است؟ (۱)
- ۱۵- کمترین تعداد تمبر لازم برای بسته ای که نیاز به 850 ریال تمبر دارد با تمبرهای 90 و 50 ریالی کدام است؟ (۱)
- ۱۶- باقیمانده ی عدد طبیعی a بر 7 برابر 3 و بر 6 برابر 4 است. باقیمانده ی این عدد بر 42 چقدر است؟ (۱)
- ۱۷- نمایش عددی در مبنای 3 به صورت $(20 \ 11 \ 21)_3$ است در نمایش این عدد در مبنای 4 ، چند مرتبه رقم صفر تکرار شده است؟ (۱)
- ۱۸- دو عدد 24 و 185 در یک دسته هم ارزی به پیمانه m هم نهشت شده اند. اگر $(m, 7) = 1$ ، باقیمانده عدد m بر 7

۱- می‌دانیم گراف کامل از مرتبه ۵ دارای ۱۰ یال می‌باشد، مسأله انتخاب ۳ یال از آن ۱۰ یال می‌باشد به طوری که یکی از یال‌ها bd باشد. این انتخاب به $\binom{9}{2}$ یعنی ۳۶ طریق امکان پذیر است.

۲- حداقل اندازه‌ی G موقعی به دست می‌آید که یک رأس از درجه‌ی $\Delta = 4$ و ۹ رأس دیگر از درجه‌ی $\delta = 2$ باشند،



یعنی:

$$\sum_{i=1}^{10} \deg v_i = 2q \Rightarrow 9 \times 2 + 4 = 2q_{\min} \Rightarrow q_{\min} = \frac{22}{2} = 11$$

$$? = \binom{5}{2} \times 2! = 20 \quad -3$$

$$18 = 2q_1 \Rightarrow q_1 = 9 \quad -4 \quad \text{در هر گراف منتظم داریم: } pr = 2q \text{ پس:}$$

$$\text{اما در } K_6 \text{ داریم } q_2 = \binom{6}{2} = 15 \text{ پس باید در کل ۶ یال اضافه کنیم.}$$

راه دوم: اگر بخواهیم با ۶ رأس کامل شود باید ۵ منتظم باشد پس کافی است به هر رأس دو یال اضافه کنیم یعنی در کل ۶ یال اضافه کنیم.

$$-5 \quad \text{حداکثر یال برای ناهمبندی برابر } \binom{p-1}{2} \text{ می‌باشد. } \binom{9}{2} = 36$$

-6 در هر درخت بین هر دو رأس دقیقاً یک مسیر وجود دارد، پس تعداد جواب‌ها برابر ۳۶ است. زیرا:

$$\binom{9}{2} = \frac{9 \times 8}{2} = 36$$

-7 می‌دانیم: گرافی که بین هر دو رأس آن دقیقاً یک مسیر وجود داشته باشد، درخت است:

$$\sum \deg v_i = 2q = 2(p-1)$$

$$\Rightarrow 7 \times 1 + 5 \times 2 + k \times 3 = 2(7 + 5 + k - 1) \Rightarrow k = 5$$

که عبارت $7 + 5 + k - 1$ تعداد یال‌ها می‌باشد.

$$xy - y + x^2 - 3x = 0 \Rightarrow y(x-1) = 3x - x^2 \Rightarrow y = \frac{x^2 - 3x}{1-x}$$

برای آنکه y مقدار صحیحی باشد باید صورت کسر بر مخرج کسر تقسیم پذیر باشد.

$$\begin{array}{r} x^2 - 3x \quad | \quad \begin{array}{l} -x + 1 \\ -x + 2 \end{array} \\ -(-x^2 - x) \\ \hline -2x \\ -(-2x + 2) \\ \hline -2 \end{array}$$

$$\Rightarrow y = \frac{x^2 - 3x}{-x + 1} = -x + 2 + \frac{-2}{-x + 1} \in \mathbb{Z} \Rightarrow -x + 1 | -2 \Rightarrow -x + 1 = \begin{cases} \pm 1 \\ \pm 2 \end{cases} \quad \text{جواب ۴}$$

۴ نقطه با مختصات‌های صحیح روی منحنی مذکور وجود دارد:

$$(0, 0), (2, 2), (-1, 2), (3, 0)$$

$$(\omega a + 4, \gamma a + 3) = d \Rightarrow \begin{cases} \omega a + 4 = dk \\ \gamma a + 3 = dk' \end{cases} \Rightarrow (\omega a + 4) + (\gamma a + 3) = d(k + k') \Rightarrow -9$$

$$\nu a + 7 = d(k + k') \Rightarrow \nu(a + 1) = d(k + k') \Rightarrow d = 1 \text{ یا } d = \nu$$

-۱۰

$$17p + 1 = k^2 \Rightarrow 17p = k^2 - 1 = (k-1)(k+1) \Rightarrow \begin{cases} k-1 = 17 \text{ یا } 1 \\ k+1 = p \end{cases}$$

$$p = 19 \text{ ق ق} \quad p = 15 \text{ غ ق ق}$$

-۱۱ داریم:

$$65 = 2^6 + 1 \Rightarrow 2^6 + 1 | 2^{n+1} + 1 = (2^6)^{2k+1} + 1 \Rightarrow 6(2k+1) = n$$

$$\Rightarrow \begin{cases} 12k + 6 = n \\ 1 \leq n < 100 \end{cases} \Rightarrow 1 \leq 12k + 6 \leq 100 \Rightarrow -5 \leq 12k \leq 100 \Rightarrow -\frac{5}{12} \leq k < 7/9$$

$$\Rightarrow k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$$

پس هشت عضو دارد.

$$\frac{a}{b} = \frac{4}{9} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a'd}{b'd} = \frac{4}{9} \\ (a', b') = 1 \end{cases} \Rightarrow \frac{a'}{b'} = \frac{4}{9} \Rightarrow a' = 4, b' = 9$$

-۱۲

$$\left. \begin{array}{l} [a, b] = 612 \\ [a, b] = \frac{a \cdot b}{(a, b)} = \frac{a'b'd^2}{d} = a'b'd \end{array} \right\} \Rightarrow 612 = 36d \Rightarrow d = 17$$

۱۳- از همنهشتی به پیمانه ۱۰ استفاده می‌کنیم. داریم:

$$\Rightarrow 7^4 + 13^3 \equiv 7^4 + 13^2 \equiv 1+9 \equiv 0$$

۱۴- توجه $a \equiv_{mk} b \Rightarrow a \equiv_b m$

$$\begin{cases} \overline{a63b29}^{11} \equiv 0 \Rightarrow 9 - 2 + b - 3 + 6 - a \equiv 0 \Rightarrow b - a \equiv 1 \Rightarrow b - a = 1 \\ \overline{a63b29}^9 \equiv 0 \Rightarrow a + 6 + 3 + b + 2 + 9 \equiv 0 \Rightarrow a + b + 2 \equiv 0 \Rightarrow a + b = 7 \text{ یا } 16 \end{cases}$$

$a = 3$ و $b = 4$ قابل قبول است.

۱۵-

$$\left. \begin{array}{l} x = \text{تعداد } 50 \text{ ریالی} \\ y = \text{تعداد } 90 \text{ ریالی} \end{array} \right\} \Rightarrow 50x + 90y = 850 \Rightarrow 5x + 9y = 85 \Rightarrow 5x = 85 - 9y \Rightarrow x = 17 - 2y + \frac{y}{5}$$

$$\frac{y}{5} \in \mathbb{Z} \Rightarrow \frac{y}{5} = t \Rightarrow y = 5t \Rightarrow x = 17 - 9t$$

$$y, x \geq 0 \Rightarrow \begin{cases} t = 0 \Rightarrow y = 0, x = 17 \\ t = 1 \Rightarrow y = 5, x = 8 \\ t = 2 \Rightarrow y = 10, x = -1 \end{cases} \Rightarrow \text{غ.ق.ق} \Rightarrow \text{Min}(x+y) = 13$$

$$\begin{aligned} (a = 6k + 4) \times 7 &\Rightarrow 7a = 42k + 28 \\ (a = 7q + 3) \times 6 &\Rightarrow 6a = 42q + 18 \end{aligned} \Rightarrow a = 42(k - q) + 10 \quad -16$$

$$(20 \ 11 \ 21)_3 = 2 \times 3^5 + 1 \times 3^3 + 1 \times 3^2 + 2 \times 3 + 1 = 529 \quad -17$$

پس در مبنای ۴ دو رقم صفر است. $(529)_{10} = \boxed{20101}_4$

۱۸-

$$185 \equiv_{24}^m \Rightarrow m \mid 185 - 24 \Rightarrow m \mid 161 \Rightarrow m \mid 7 \times 23 \xrightarrow{(m,7)=1} m \mid 23 \Rightarrow m = 23$$

$$\Rightarrow m^m = 23^{23} \equiv 2^{23} \equiv (2^3)^7 \times 2^2 \equiv 1 \times 4 = 4$$