

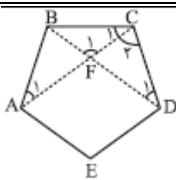
نام و نام خانوادگی: رشته: چهارم ریاضی شماره داوطلب: تعداد برگ سؤال: ۱ برگ	جمهوری اسلامی ایران اداره آموزش پرورش تهران اداره آموزش پرورش منطقه ۵ دبیرستان و پیش‌دانشگاهی دخترانه باب‌السلام امتحانات پایانی نوبت اول سال تحصیلی ۹۴-۹۳	نام درس: دیفرانسیل نام دبیر: فانم مسینی تاریخ امتحان: ۸ / ۱۰ / ۱۳۹۳ ساعت امتحان: ۸:۰۰ مدت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
--	--	---

ردیف	جای مهر	بارم
۱	قضیه‌ی هیپاسوس را بیان و اثبات کنید.	۱
۲	نامعادله‌ی $\frac{5}{x-1} < \frac{-2}{x}$ را با شرط $x > 0$ حل کنید و جواب آن را به صورت همسایگی متقارن $ x - \alpha  < \beta$ نمایش دهید.	۱
۳	دنباله‌ای بنویسید که از اعداد گویا ساخته شده باشد و جملات آن بین اعداد $\frac{1}{3}$ و $\frac{1}{2}$ باشد؟	۰/۵
۴	یکنوایی دنباله‌های $\{1 + (\frac{1}{2})^n\}$ ، $\{(1 + \frac{1}{n})^{n+1}\}$ را بررسی کنید.	۱
۵	در دنباله‌ی $a_n = \frac{2n}{n+1}$ حداقل مقدار $n$ چقدر باشد تا فاصله‌ی جملات از نقطه‌ی همگرایی کمتر از $\frac{1}{1000}$ باشد؟	۱
۶	اگر $a_1 = 1$ ، $a_{n+1} = \sqrt{6 + a_n}$ مقدار $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n$ چقدر است؟	۱
۷	همگرایی و واگرایی دنباله‌ی $\{n \cos \frac{n\pi}{2}\}$ را بررسی کنید.	۱
۸	اگر $P_n$ همگرا و داشته باشیم $P_{n+1} = \frac{P_n}{3 - P_n}$ آن‌گاه دنباله‌ی $\{P_n\}$ به چه عددی همگراست؟	۱
۹	به کمک دنباله‌ها ثابت کنید که تابع $f(x) = \sin \frac{\pi}{x}$ در $x=0$ حد ندارد؟	۱
۱۰	اگر $H(x)$ تابع هوی ساید باشد حاصل $\lim_{x \rightarrow \pi^+} H(\sin x)$ چقدر است؟	۰/۵
۱۱	حاصل $\lim_{x \rightarrow 0} [\frac{\sin x}{x}]$ را حساب کنید.	۱
۱۲	اگر $f(x) = [x + \frac{1}{3}] + [3x]$ دنباله‌ی $\{f(\frac{1}{3} + \frac{1}{n})\}$ به چه عددی همگراست؟	۱
۱۳	حاصل $\lim_{x \rightarrow \infty} (\sqrt[3]{8x^3 + 2x^2} - 2x)$ چقدر است؟	۱
۱۴	پیوستگی تابع $f(x) = \begin{cases} 4 & x^2 =  x  \\ x+2 & x^2 \neq  x  \end{cases}$ را بررسی کنید.	۲
۱۵	نشان دهید که معادله‌ی $x - \cos x = 0$ ریشه‌ای در بازه‌ی $(0, 1)$ دارد؟	۱

۲	مجانب های توابع $f(x) = \frac{x^3 - (x+1)^3}{x^2 + x + 1}$ و $g(x) = x\sqrt{\frac{4x+1}{x+1}}$ را به دست آورید.	۱۶
۱	اگر $f(x) = \begin{cases} x-1 & 1 < x < 2 \\ 2x-4 & 3 < x < 4 \end{cases}$ باشد تابع $f^{-1}$ در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است؟	۱۷
۱	به کمک تعریف مشتق ثابت کنید که مشتق تابع $f(x) = \sin x$ برابر $\cos x$ است؟	۱۸
۱	مشتق توابع زیر را حساب کنید. $f(x) = \sin^2 \frac{\pi}{x} + \cos^3 \sqrt{x}$ $g(x) = \tan^{-1}(x^2) + e^{\frac{1}{x}}$	۱۹
۲۰	جمع بارم	

\*\*\*و به امید آن خدایی که در این نزدیکی است\*\*\*



بارم	جای مهر	ردیف												
۱	 <p>در مثلث FCD داریم <math>\hat{C}_\gamma = 72^\circ</math> و <math>\hat{C}_\delta = 72^\circ</math> پس مثلث FCD متساوی الساقین است و در نتیجه <math>CD = DF = a</math> خواهد بود و همچنین <math>BF = d - a</math> است (d قطر است). حال تشابه دو مثلث FBC و BCD را بررسی می‌کنیم:</p> $\begin{cases} \hat{C}_1 = \hat{D}_1 = 72^\circ \\ \hat{F}_1 = \hat{C} = 108^\circ \end{cases} \Rightarrow \triangle BCD \sim \triangle BFC \Rightarrow \frac{BC}{BD} = \frac{FC}{BC} = \frac{BF}{BC} \Rightarrow \frac{a}{d} = \frac{d-a}{a} \Rightarrow a^2 = d^2 - ad \Rightarrow 1 = \left(\frac{d}{a}\right)^2 - \left(\frac{d}{a}\right)$ $\frac{d}{a} = x \rightarrow x^2 - x - 1 = 0 \Rightarrow x = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2} \quad x > 0 \rightarrow x = \frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \frac{d}{a}$	۱												
۱	$\frac{\frac{5}{x-1} + \frac{2}{x} < 0 \Rightarrow \frac{5x + 2(x-1)}{x(x-1)} < 0 \Rightarrow \frac{7x-2}{x(x-1)} < 0$ <table border="1" data-bbox="239 1052 670 1254"> <tr> <td>x</td> <td>0</td> <td><math>\frac{2}{7}</math></td> <td>1</td> </tr> <tr> <td><math>\frac{7x-2}{x(x-1)}</math></td> <td>-</td> <td>+</td> <td>-</td> </tr> <tr> <td></td> <td>ن</td> <td>ن</td> <td>ن</td> </tr> </table> <p>یا فرض <math>x &gt; 0</math> جواب <math>1 &lt; x &lt; \frac{2}{7}</math> است.</p> $\alpha = \frac{\frac{2}{7} + 1}{2} = \frac{9}{14}, \quad \beta = \frac{1 - \frac{2}{7}}{2} = \frac{5}{14} \Rightarrow  x - \frac{9}{14}  < \frac{5}{14}$	x	0	$\frac{2}{7}$	1	$\frac{7x-2}{x(x-1)}$	-	+	-		ن	ن	ن	۲
x	0	$\frac{2}{7}$	1											
$\frac{7x-2}{x(x-1)}$	-	+	-											
	ن	ن	ن											
۰/۵	$\frac{1}{3} < a_n < \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{n}{3n} < a_n < \frac{1}{2} \Rightarrow a_n = \frac{n+1}{3n+2}$	۳												
۱	<p>دنباله‌ی <math>a_n = (1 + \frac{1}{n})^{n+1}</math> و دنباله‌ی <math>b_n = 1 + (\frac{1}{n})^n</math> نزولی است.</p>	۴												
۱	$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{2n}{n+1} = 2 \quad  a_n - L  < \epsilon \Rightarrow \left  \frac{2n}{n+1} - 2 \right  < \frac{1}{1000} \Rightarrow \frac{2}{n+1} < \frac{1}{1000} \Rightarrow n+1 > 2000 \Rightarrow n \geq 2000$	۵												
۱	$\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \lim_{n \rightarrow \infty} a_{n+1} = L \Rightarrow L = \sqrt{6+L} \Rightarrow L = 3$	۶												
۱	$\lim_{n \rightarrow \infty} n \cos \frac{n\pi}{2} = \begin{cases} \pm\infty & \text{زوج } n \\ 0 & \text{فرد } n \end{cases} \Rightarrow a_n \text{ همگرا نیست (واگراست)}$	۷												
۱	$L = \frac{L}{3-L} \Rightarrow 3-L=1 \Rightarrow L=2$	۸												

	<p>با انتخاب <math>a_n = \frac{1}{n}</math> و <math>b_n = \frac{1}{\sqrt{n}}</math> داریم:</p> $\lim_{x \rightarrow \infty} a_n = \lim_{x \rightarrow \infty} b_n = 0 \quad f(a_n) = \sin \frac{\pi}{\frac{1}{n}} = \sin n\pi = 0 \quad f(b_n) = \sin \frac{\pi}{\frac{1}{\sqrt{n}}} = \sin(\sqrt{n}\pi + \frac{\pi}{\sqrt{n}}) = 1$ <p>طبق قضیه‌ی حد و دنباله <math>f(x) = \sin \frac{\pi}{x}</math> در <math>x=0</math> حد ندارد.</p>	۹
۰/۵	$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geq 0 \\ 0 & x < 0 \end{cases} \quad \lim_{x \rightarrow \pi^+} H(\sin x) = H(0^-) = 0$	۱۰
۱	$\lim_{x \rightarrow 0} \left[ \frac{\sin x}{x} \right] = [1^-] = 0 \quad 0 < \frac{\sin x}{x} < 1$	۱۱
۱	$f\left(\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}\right) = \left[\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n} + \frac{1}{\sqrt{n}}\right] + \left[\sqrt{\frac{1}{\sqrt{n}} + \frac{1}{n}}\right] = \left[\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right] + \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right] \Rightarrow \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\left[\frac{1}{n} + \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right] + \left[1 + \frac{\sqrt{2}}{n}\right]\right) = \left[\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{n}}\right] + [1^+] = 0 + 1 = 1$	۱۲
۱	$\lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{\lambda x^3 + 2x^3} - 2x) = \lim_{x \rightarrow +\infty} (\sqrt[3]{\lambda} (x + \frac{2}{\lambda}) - 2x) = \frac{1}{\lambda}$	۱۳
۲	$x^{\sqrt{x}} =  x  \Rightarrow x = 0, \pm 1 \Rightarrow f(x) = \begin{cases} 4 & x = 0, \pm 1 \\ x+2 & x \neq 0, \pm 1 \end{cases}$ <p><math>f(0) = 4, \lim_{x \rightarrow 0} f(x) = 2, f(1) = 4, \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3, f(-1) = 4, \lim_{x \rightarrow -1} f(x) = 1</math></p> <p>پس این تابع در سه نقطه ناپیوسته است.</p>	۱۴
۱	<p>تابع <math>f(x) = x - \cos x</math> در فاصله‌ی <math>(0, 1)</math> پیوسته است و همچنین:</p> $f(0) = -1, f(1) = 1 - \cos 1 > 0 \Rightarrow f(0)f(1) < 0$ <p>طبق قضیه‌ی بولزانو <math>f</math> در <math>(0, 1)</math> پیوسته است.</p>	۱۵
۲	$f(x) = \frac{x^{\sqrt{x}} - (x^{\sqrt{x}} + 2x^{\sqrt{x}} + 3x + 1)}{x^{\sqrt{x}} + x + 1} = \frac{-2x^{\sqrt{x}} - 3x - 1}{x^{\sqrt{x}} + x + 1}$ <p><math>x^{\sqrt{x}} + x + 1 = 0 \Rightarrow \Delta &lt; 0 \Rightarrow</math> فاقد مجانب قائم</p> $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-2x^{\sqrt{x}}}{x^{\sqrt{x}}} = -2 \Rightarrow y = -2$ مجانب افقی $g(x) = x \sqrt{\frac{3x+1}{x+1}} = 2x \sqrt{\frac{x+\frac{1}{2}}{x+1}} \Rightarrow \begin{cases} x = -1 & \text{مجانب قائم} \\ y = 2\left(x + \frac{1}{2}\right) & \text{مجانب مایل} \end{cases}$	۱۶
۱	<p>تابع <math>f(x)</math> در فاصله‌ی <math>(1, 2) \cup (3, 4)</math> پیوسته است پس در نتیجه <math>f^{-1}</math> روی <math>R_f</math> یعنی <math>(0, 1) \cup (2, 4)</math> پیوسته خواهد بود.</p>	۱۷
۱	$f'(a) = \lim_{x \rightarrow a} \frac{\sin x - \sin a}{x - a} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{2 \sin \frac{x-a}{2} \cos \frac{x+a}{2}}{x-a} = \lim_{x \rightarrow a} \cos \frac{x+a}{2} = \cos a \Rightarrow f'(x) = \cos x$	۱۸

۱	$f'(x) = 2x \frac{-\pi}{x^2} \times \sin \frac{\pi}{x} \times \cos \frac{\pi}{x}$ , $g'(x) = \frac{2x}{1+x^2} + \frac{-1}{x^2} e^{\frac{1}{x}}$	۱۹
۲۰	جمع بارم	