

ش صندلی (ش داوطلب):	نام واحد آموزشی: دبیرستان سرای دانش نوبت امتحانی: اول	ساعت امتحان: ۸ صبح
نام و نام خانوادگی:	نام پدر:	وقت امتحان: ۱۲۰ دقیقه
سؤال امتحان درس: دیفرانسیل	نام دبیر:	تاریخ امتحان: ۹۳/۱۰/۸
	سال تحصیلی: ۹۴ - ۹۳	
	رشته: چهارم ریاضی	

ردیف	سوال	بارم
۱	ثابت کنید $\log 3$ گویا نیست.	۱
۲	مجموعه جواب نامعادله $ 2x - 3 < 7$ را به صورت یک همسایگی متقارن به مرکز a و به شعاع δ نوشته ایم. a و δ را بیابید.	۱
۳	دنباله ای بنویسید که فقط از بالا کران دار باشد و نیز این دنباله یکنوا باشد.	۰/۵
۴	با استفاده از قضیه فشردگی نشان دهید دنباله $\left\{ \frac{\sin n}{n^2 + 1} \right\}$ همگراست.	۱
۵	ابتدا حد دنباله $\left\{ \frac{n+3}{2n+1} \right\}$ را حدس بزنید و سپس حدس خود را به روش ε اثبات کنید.	۱
۶	با استفاده از قضایای حد دنباله، حاصل حد دنباله زیر را بیابید.	۱
	$\left\{ \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^{\frac{n}{3}} \right\}$	
۷	نشان دهید دنباله $\left\{ \frac{(n+2)!}{5^n} \right\}$ یکنوا است.	۱
۸	با استفاده از تعریف نشان دهید:	۱
	$\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 4n) = +\infty$	
۹	حاصل حدهای زیر را بیابید.	۳
	الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x - 1} - 1}{\sqrt{x} - 1}$ ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot x}$ ج) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2 + x}{x+2} \right)$	
۱۰	نشان دهید تابع $D(x) = \begin{cases} 2 & ; x \in \text{گویا} \\ -1 & ; x \in \text{گنگ} \end{cases}$ در $x = \sqrt{5}$ حد ندارد.	۱/۵
۱۱	به کمک تعریف ثابت کنید:	۱
	$\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{x - 1} = 3$	
۱۲	مقادیر a و b را چنان بیابید که تابع f با ضابطه‌ی مقابل در $x = 1$ پیوسته باشد.	۱/۲۵
	$f(x) = \begin{cases} a \sin \frac{\pi}{4} + \cos \pi x & ; x > 1 \\ 3 & ; x = 1 \\ \frac{\sin(x-1)}{x^3 - 1} + b & ; x < 1 \end{cases}$	

ردیف	سوال	بارم
۱۳	عددهای a و b را چنان بیابید که تابع $f(x) = (x^2 + ax - b) \cdot \text{sgn}(x^2 + x - 2)$ روی \mathbb{R} پیوسته باشد. (sgn تابع علامت است.)	۱
۱۴	نشان دهید که معادله $\sin x - x^2 + x + 1 = 0$ در بازه $[-\pi, \pi]$ حداقل دو ریشه دارد.	۱/۲۵
۱۵	مجانبات تابع $f(x)$ با ضابطه $f(x) = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4}$ را در صورت وجود بیابید.	۱/۵
۱۶	مشتق پذیری تابع $f(x) = (1 + \cos x) \cdot \sin 3x $ را در $x = 0$ بررسی نمایید.	۲
	موفق باشید	جمع کل
		۲۰

<p>ساعت امتحان: ۸ صبح تاریخ امتحان: ۹۳/۱۰/۸ تعداد برگ راهنمای تصحیح: ۲ برگ</p>	<p>نام واحد آموزشی: دبیرستان غیردولتی دخترانه سرای دانش نام دبیر:</p>	<p>راهنمای تصحیح درس: دیفرانسیل نوبت امتحانی: اول رشته: رشته‌های: چهارم ریاضی سال تحصیلی: ۹۴ - ۹۳</p>
--	--	--

بارم	
۱	<p>۱. مسئله را بر اساس برهان خلف حل می‌شود، فرض کنید $\log 3$ عددی گویا است، پس</p> $\log 3 = \frac{m}{n} \quad (m, n \in \mathbb{N}) \rightarrow 3 = 10^{\frac{m}{n}} \rightarrow 3^n = 10^m$ <p>چون 10^m همواره زوج و 3^n همواره فرد است پس $3^n \neq 10^m$ در نتیجه $\log 3$ عددی گویا نیست.</p>
۱	<p>۲. $a = \frac{3}{2}$ مرکز $\delta = \frac{7}{2}$ شعاع $2x - 3 < 7 \rightarrow -7 < 2x - 3 < 7 \rightarrow -4 < 2x < 10 \rightarrow -2 < x < 5$</p>
۰/۵	<p>۳. هر دنباله غیر ثابت که شرایط فقط از بالا کران دار و یکنوایی را داشته باشد قابل قبول است.</p>
۱	<p>۴. می‌دانیم: $-1 < \sin n < 1$ طرفین رابطه را در $\frac{1}{n^2 + 1}$ ضرب می‌کنیم</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\sin n}{n^2 + 1} = 0$ <p>چون $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{-1}{n^2 + 1}\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{n^2 + 1}\right) = 0$ بنابر قضیه فشردگی</p>
۱	<p>۵. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{n+3}{2n+1}\right) = \frac{1}{2} \rightarrow l = \frac{1}{2}$</p> $\forall \varepsilon > 0; \exists M \in \mathbb{N}; n \geq M \Rightarrow \left \frac{n+3}{2n+1} - \frac{1}{2} \right < \varepsilon \rightarrow 4n+2 > \frac{5}{\varepsilon} \rightarrow n > \frac{1}{4} \left(\frac{5}{\varepsilon} - 2\right) \quad M = \left[\frac{1}{4} \left(\frac{5}{\varepsilon} - 2\right)\right] + 1$
۱	<p>۶. $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{2}{n+1}\right)^n = 1^\infty = e^A$ $A = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{n+1}\right) \left(\frac{n}{3}\right) = \frac{2}{3} \Rightarrow$ مقدار همگرایی $= e^{\frac{2}{3}}$</p>
۱	<p>۷. پس صعودی است $\left\{ \frac{(n+2)!}{5^n} \right\}_{n=2}$ $n \in \mathbb{N}; a_{n+1} = \frac{(n+3)!}{5^{n+1}} = \frac{n+3}{5} \geq 1$</p>
۱	<p>۸. به ازای هر عدد حقیقی مثبت k داریم:</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} (n^2 + 4n) = +\infty$ $n \geq M \Rightarrow n^2 + 4n > k \rightarrow (n+2)^2 - 4 > k \rightarrow n > \sqrt{k+4} - 2 \Rightarrow M = [\sqrt{k+4} - 2] + 1$
۳	<p>۹. الف) $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{\sqrt{x^2 + x} - 1 - 1}{\sqrt{x} - 1} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{(x^2 + x - 2)(\sqrt{x} + 1)}{(x-1)(\sqrt{x^2 + x} - 1 + 1)} = 4$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \tan x}{1 - \cot x} = \frac{0}{0} \rightarrow \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{1 - \frac{\sin x}{\cos x}}{1 - \frac{\cos x}{\sin x}} = \lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{4}} \frac{\sin x (\cos x - \sin x)}{\cos x (\sin x - \cos x)} = -1$</p> <p>ج) $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \left(\frac{x^2}{x-1} - \frac{x^2+x}{x+2}\right) = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x^2 + x}{x^2 + x - 2} = 2$</p>
۱/۵	<p>۱۰. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = \sqrt{5}$ دنباله گویا $\lim_{n \rightarrow \infty} b_n = \sqrt{5}$ دنباله گنگ</p> $D(a_n) = D\left(\frac{[\sqrt{5n}]}{n}\right) = 2 \quad D(b_n) = D\left(\sqrt{5} + \frac{1}{n}\right) = -1 \quad D_{n \rightarrow \infty}(a_n) \neq D_{n \rightarrow \infty}(b_n)$

۱	<p>۱۱</p> $f(x) = \frac{(x-1)(x^2+x+1)}{x-1} = x^2+x+1$ <p>دنباله‌ی غیر ثابت $\{a_n\}$ و همگرا به ۱ را در نظر بگیرید. $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 1$</p> $\lim_{n \rightarrow \infty} f(a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_n^2 + a_n + 1) = 3 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} f(x) = 3$
۱/۲۵	<p>۱۲</p> $\lim_{x \rightarrow 1^+} f(x) = a - 1 \quad a - 1 = 3 \rightarrow a = 4$ $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = \frac{1}{4} + b \quad \frac{1}{4} + b = 3 \rightarrow b = \frac{11}{4}$ <p>$f(1) = 3$</p>
۱	<p>۱۳</p> $x^2 + x - 2 = 0 \rightarrow x = 1, -2$ $x = 1 \rightarrow x^2 + ax - b = 0 \rightarrow 1 + b = 0$ $x = -2: -4 - 2a - b = 0 \rightarrow 2a + b = -4$ $\begin{cases} a - b = -1 \\ 2a + b = -4 \end{cases} \Rightarrow \begin{matrix} a = -3 \\ b = -2 \end{matrix}$
۱/۲۵	<p>۱۴</p> <p>$f(x) = \sin x - x^2 + x + 1$ در R پیوسته است.</p> <p>$[-\pi, \pi]$: $f(0) = 1 > 0$, $f(-\pi) = -\pi^2 - \pi + 1 < 0 \rightarrow f(0) \cdot f(-\pi) < 0$ (وجود حداقل یک ریشه در بازه $(-\pi, 0)$)</p> <p>$[0, \pi]$: $f(0) = 1 > 0$, $f(\pi) = -\pi^2 + \pi + 1 < 0 \rightarrow f(0) \cdot f(\pi) < 0$ (وجود حداقل یک ریشه در بازه $(0, \pi)$)</p>
۱/۵	<p>۱۵</p> <p>مجانب قائم $x^2 - 4 = 0 \rightarrow x = 2, x = -2$</p> <p>$D_f = R - \{-2, 2\}$</p> <p>مجانب افقی ندارد. $\lim_{n \rightarrow \pm\infty} \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4} = \infty$</p> <p>مجانب مایل $y = \frac{x^3 + 2x^2 + 1}{x^2 - 4} \rightarrow x + 2$</p>
۲	<p>۱۶</p> $f'_+(\cdot) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \cos x) \sin 3x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{(1 + \cos x)(3x)}{x} = 6$ $f'_-(\cdot) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 + \cos x) \sin 3x }{x} = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{(1 + \cos x)(-3x)}{x} = -6$ <p>$f'_+(\cdot) \neq f'_-(\cdot)$ چون مشتق پذیر نیست چون $x = 0$ در $f(x)$</p>
۲۰	<p>موفق باشید</p> <p>جمع کل</p>