

ش سندلی :	نام و نام خانوادگی:	کلاس: چهارم	زمان امتحان: ۹۰ دقیقه
رشته: ریاضی	درس: دیفرانسیل	تعداد صفحات: ۲	تاریخ امتحان: ۹۳/۱۰/۰۸

بارم	۱- مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که
۱	$\frac{\sqrt{3b}}{55} = \frac{\sqrt{5a^3}}{55}$
۱	۲- مجموعه جواب نامعادله $x^2 < x + 6 $ را بصورت یک همسایگی متقارن بنویسید.
۲	۳- همگرایی و واگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید.
	۱) $\left\{ \frac{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^4 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^3}{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^5 - \left(1 + \frac{1}{n}\right)^2} \right\}$
	۲) $\left\{ \frac{\left(n^2 + 2n - 1\right)^3 - \left(n^2 - n - 1\right)^3}{(2n+1)(n+1)^4} \right\}$
۱/۵	۴- جملات دنباله $a_n = \frac{n+2 \cos n\pi}{2n+1}$ برای اعداد $n \geq M$ همگی در بازه $(0/49, 0/51)$ قرار می گیرند. حداقل M کدام است؟
۲	۵- ثابت کنید دنباله $a_n = \frac{1 \times 3 \times 5 \times \dots \times (2n-1)}{2^n \times n!}$ همگراست.
۱/۵	۶- ثابت کنید تابع $f(x) = \cos \frac{1}{x-6}$ در $x = 6$ حد ندارد.
۴	۷- حاصل حدود زیر را حساب کنید.
	۱) حد $\frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x}$ $x \rightarrow 0$
	۳) حد $\frac{\sqrt{x^3 + 2x^2 + 1} - \sqrt{x^3 - x^2 + 1}}{\sqrt{2x+1}}$ $x \rightarrow +\infty$

۲) حد $\lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}}$

۴) حد $\lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2}$

۲

۸- اگر تابع $f(x) = \begin{cases} \frac{a}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{x} & x < 0 \\ \left[x - \frac{1}{2} \right] & x = 0 \\ \frac{\sqrt{2} b \sin x}{\sqrt{1 - \cos x}} + 5^{\log x} & x > 0 \end{cases}$ در $x = 0$ پیوسته باشد. $a + b$ کدام است؟

۱/۵

۹- اگر $f(x) = \begin{cases} x - 1 & 1 < x < 2 \\ 2x - 4 & 3 < x < 4 \end{cases}$ تابع f^{-1} در چند نقطه از دامنه اش ناپیوسته است؟

۱/۵

۱۰- مجانب مایل منحنی $y = x \cos^{-1} \frac{2}{x}$ کدام است؟

۲

۱۱- اگر $f(x) = |x^2 - 4| \left[-x^3 \right]$ حاصل $f'_+(2) - f'_-(2)$ کدام است؟

راهنمای تصحیح امتحان درس: دیفرانسیل	کلاس: چهارم	زمان امتحان: ۹۰ دقیقه
رشته: ریاضی	تعداد صفحات: ۳	تاریخ امتحان: ۹۳/۱۰/۰۸

بارم ۱	$0.5\overline{a3} = \frac{5\overline{a3} - 5}{990}$ $\frac{5\overline{a3} - 5}{990} = \frac{3b}{55} \rightarrow 5\overline{a3} - 5 = 18(3b)$ $500 + 10a + 3 - 5 = 18(30 + b) \rightarrow 40 + 18b + 2 = 10a$	-۱
	<p>بنابراین $18b + 2$ باید مضرب ۱۰ باشد پس در نتیجه $b = 1, a = 6$</p>	
۱	$x^2 = x + 6 \Rightarrow x^2 - x - 6 = 0 \Rightarrow (x - 3)(x + 3) = 0 \Rightarrow \begin{cases} x = 3 \\ x = -2 \end{cases}$ <p>مجموعه جواب $(-1, 3)$ است که مرکز $\frac{-2+3}{2} = \frac{1}{2}$ و شعاع $\frac{3-(-2)}{2} = \frac{5}{2}$</p>	-۲
۲	<p>1) $1 + \frac{1}{n} = t \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{t^4 - t^3}{t^5 - t^2} = \frac{0}{0} \rightarrow HOP \rightarrow \frac{4t^3 - 3t^2}{5t^4 - 2t} = \frac{1}{3}$</p> <p>2) $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{(n^2 + 2n - 1)^3 - (n^2 - n - 1)^3}{(2n + 1)(n + 1)^4} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{3n(n^4 + n^4 + n^4)}{2n^5} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{9n^5}{2n^5} = \frac{9}{2}$</p>	-۳
۱/۵	$a_n = \frac{n + 2(-1)^n}{2n + 1}$ $n = 2k \Rightarrow a_n = \frac{n + 2}{2n + 1} \Rightarrow \left \frac{n + 2}{2n + 1} - \frac{1}{2} \right < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{3}{2n + 1} < \frac{1}{50} \Rightarrow n > 74.5 \quad 76, 78, \dots$ $n = 2k + 1 \Rightarrow a_n = \frac{n - 2}{2n + 1} \Rightarrow \left \frac{n - 2}{2n + 1} - \frac{1}{2} \right < \frac{1}{100} \Rightarrow \frac{5}{2n + 1} < \frac{1}{50} \Rightarrow n > 124.5 \quad 125, 127, \dots$ <p>$m = 125$</p>	-۴
	شماره صفحه: ۱	

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{1*3*5*\dots*(2n-1)*(2n+1)}{2^{n+1}(n+1)!}}{\frac{1*3*5*\dots*(2n-1)}{2^n(n)!}} = \frac{2n+1}{2n+2} < 1$$

نزولی است. پس از پایین کراندار است بنابراین نزولی و از پایین کراندار است پس همگراست.

$$a_n = 6 + \frac{1}{2\pi n} \quad f(a_n) = \cos 2n\pi = 1$$

$$b_n = 6 + \frac{1}{2\pi n + \frac{\pi}{2}} \quad f(b_n) = \cos(2n\pi + \frac{\pi}{2}) = 0$$

بنابراین تابع f در x=1 حد ندارد.

$$1) \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sqrt{\cos x} - \sqrt{\cos 3x}}{1 - \cos x} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{hop} \Rightarrow \frac{\frac{-\sin x}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{3\sin 3x}{2\sqrt{\cos 3x}}}{\sin x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(\frac{-1}{2\sqrt{\cos x}} + \frac{9}{2\sqrt{\cos 3x}})}{1 - \cos x} = 4$$

$$2) \lim_{x \rightarrow 2} \frac{|x^2 - x - 2|}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} \frac{0}{0} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-x^2 + x + 2}{2x - \sqrt{x^2 + 12}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{HOP} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 2} \frac{-2x + 1}{2 - \frac{2x}{2\sqrt{x^2 + 12}}} = -2$$

$$3) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = 0 * \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hop} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{-\frac{\pi}{2}(1 + \cot^2 \frac{\pi x}{2})} = \frac{3}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{-6}{\pi}$$

$$4) \lim_{x \rightarrow 1} (x^3 - 1) \operatorname{tg} \frac{\pi x}{2} = 0 * \infty \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^3 - 1}{\cot \frac{\pi x}{2}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{Hop} \Rightarrow \lim_{x \rightarrow 1} \frac{3x^2}{-\frac{\pi}{2}(1 + \cot^2 \frac{\pi x}{2})} = \frac{3}{-\frac{\pi}{2}} = \frac{-6}{\pi}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{x^3 + 3x^2 + 1 - x^3 + x^2 - 1}{\sqrt{2x+1}(\sqrt{x^3 + 3x^2 + 1} + \sqrt{x^3 - x^2 + 1})} = \lim_{x \rightarrow \infty} \frac{2x^2}{\sqrt{2}x^2} = \sqrt{2}$$

۲

$$\lim_{x \rightarrow 0^-} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^-} \frac{a}{\pi} \operatorname{tg}^{-1} \frac{1}{x} = -\frac{a}{2}$$

$$f(0) = -1$$

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} f(x) = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sqrt{2bx}}{\sqrt{\frac{x^2}{2}}} + 5^{\log x} = 2b \quad -\lambda$$

$$2b = -1 \Rightarrow b = -\frac{1}{2} \quad a = 2$$

۱/۵

۹- تابع f^{-1} در تمام نقاط دامنه اش پیوسته است.

۱/۵

-۱۰

$$m = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{y}{x} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{x \cos^{-1} \frac{2}{x}}{x} = \cos^{-1} \frac{\pi}{2}$$

$$h = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} y - mx = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \cos^{-1} \frac{2}{x} - \frac{\pi}{2} x = \infty - \infty$$

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} x \left(\cos^{-1} \frac{2}{x} - \frac{\pi}{2} \right) = \infty \times 0 \Rightarrow \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{\cos^{-1} \frac{2}{x} - \frac{\pi}{2}}{\frac{1}{x}} = \frac{0}{0} \Rightarrow \text{hop } y = mx + h = \frac{\pi}{2} x + 2$$

۲

-۱۱

$$f'_+(2) = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{|x^2 - 4|[-x^3]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^+} \frac{(x - 2)(x + 2)[-x^3]}{(x - 2)} = -36$$

$$f'_-(2) = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{|x^2 - 4|[-x^3]}{x - 2} = \lim_{x \rightarrow 2^-} \frac{-(x - 2)(x + 2)[-x^3]}{(x - 2)} = 32$$