به نام خدا

نام و نام خانوادگی :   امتحان درس : **دیفرانسیل**

کلاس : **چهارم**   رشته : **ریاضی**   وقت امتحان : **۱۱۰**   کد : **۹۳۱۰۱۳-۴۰۱**

دانش آموز عزیز شما می توانید پاسخنامه امتحان را دو ساعت پس از پایان امتحان در پورتال مدرسه ملاحظه نمائید.

www.bagheralolum.sch.ir

۱- بازه $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$ را به صورتیک همسایگی محذوف متقارن به مرکز a و شعاع 4 بنویسید. (۱نمره)

۲- مجموعه جواب نامعادله $\big||X+1|-2\big|<3$ را بدست آورید.(۱/۲۵)

۳- اگر برای هر عدد حقیقی $K\neq 1$ داشته باشیم $\left[\frac{k^2}{k^2+1}\right]\leq a^2+4b^2-a-4b+\frac{5}{4}<(k-1)^4$ آنگاه a,b را بدست آورید .(۲)

۴- چه تعداد از جملات دنباله $\left\{\frac{3n^2}{n^2+1}\right\}$ در همسایگی 3 به شعاع $\frac{1}{50}$ قرار ندارد ؟(۱/۵)

۵- همگرایی دنباله های زیر را بررسی کنید .(۲)

$1:\ a_{n=}\sqrt{n}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ $2:\ \ a_n=\left[\frac{4n-3}{n+7}\right]$

۶- یکنوایی دنباله ی $\sqrt{n+1}-\sqrt{n}$ را بررسی کنید.(۲)

۷- حدود توابع زیر را بدون استفاده از هم ارزی و قاعده هوپیتال محاسبه کنید.(۳)

$1:\ lim_{x\to 2^+}\frac{\sqrt{x^2-4}}{x-2}$ $2:\ lim_{x\to(\frac{\pi}{2})}\frac{\cos x}{\sqrt{1-sin^2x}}$ $3:lim_{x\to\infty}\frac{2x}{1+x}\ .Arc\tan x$

۸- اگر تابع $f(x)=(x^2+ax+1)\sin\frac{\pi}{x+1}$ در $x=-1$ حد داشته باشد . آنگاه $f(3)$ را بدست آورید .(۱/۵)

۹-اگر X در ناحیه اول و چهارم باشد و $x-x^3\leq xf(x)\leq sinx$. آنگاه $lim_{x\to 0}\ \ f(x)$ را بدست آورید.(۱/۵)

۱۰- تابع $D(x)=\begin{cases}1 & x\in Q\\ 0 & x\in Q\end{cases}$ مفروض است . تابع $f(x)=x^3-4x^2+3x)\ D(x)$ در چند نقطه دارد .(۱/۵)

۱۱- با استفاده از تعریف حد ثابت کنید (۱/۷۵)

$1:\ lim_{x\to+\infty}\ \frac{2x^3+1}{x^3-1000}=2$

۱۲- با استفاده از دنباله ها ثابت کنید . $f(x)=\frac{|x|}{x}$ در نقطه $x=0$ حد ندارد . (۱)

مرکز پیش دانشگاهی و دبیرستان
باقرالعلوم(ع)
واحد آزمون-رایانه

امتحان درس دیفرانسیل - دی ماه ۹۳

۱)

$$\left.\begin{aligned} a &= \frac{\frac{5}{2}+\frac{3}{2}}{2} = 2 \\ \varepsilon &= \frac{\frac{5}{2}-\frac{3}{2}}{2} = \frac{1}{2} \end{aligned}\right\} \Rightarrow \left\{ x \in \mathbb{R} \mid 0 < |x-2| < \frac{1}{2} \right\}$$

۲)

$$\big||x+1|-2\big| < 3 \Longrightarrow -3 < |x+1|-2 < 3 \xrightarrow{+2} -1 < |x+1| < 5$$

$$\Rightarrow 0 \leq |x+1| \leq 5 \Rightarrow -5 \leq x+1 \leq 5 \Rightarrow -6 \leq x \leq 4$$

$$\{x \mid x \in \mathbb{R},\ -6 \leq x \leq 4\}$$

۳.

$$\left[\frac{k^2}{k^2+1}\right] \leq a^2 + 4b^2 - a - 4b + \frac{5}{4} \leq (k-1)^4$$

$$\left[\frac{k^2}{k^2+1}\right] \leq a^2 - a + \frac{1}{4} + 4b^2 - 4b + 1 \leq (k-1)^4$$

$$\left[\frac{k^2}{k^2+1}\right] \leq \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 + (2b-1)^2 \leq (k-1)^4 \Rightarrow \begin{cases} \left(a-\frac{1}{2}\right)^2 = 0 \to a = \frac{1}{2} \\ (2b-1)^2 = 0 \to b = \frac{1}{2} \end{cases}$$

۴.

$$|a_n - L| < \varepsilon \Rightarrow \left|\frac{3n^2}{n^2+1} - 3\right| < \frac{1}{50}$$

$$\Rightarrow \left|\frac{3n^2 - 3n^2 - 3}{n^2+1}\right| < \frac{1}{50} \Rightarrow \frac{3}{n^2+1} < \frac{1}{50} \Rightarrow 150 < n^2+1$$

$$\Rightarrow 149 < n^2 \Rightarrow 13 \leq n$$

پس ۱۲ جمله در این همسایگی قرار ندارد.

۵.

الف)

$$a_n = \sqrt{n}\left(\sqrt{n+1} - \sqrt{n}\right) \times \left(\frac{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}\right) = \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \frac{1}{2}$$

همگرا به $\frac{1}{2}$ است.

ب) $a_n = \left[\frac{۴n-۳}{n+۷}\right] = \left[\frac{۴n+۲۸-۲۸-۳}{n+۷}\right] = \left[۴-\frac{۳۰}{n+۷}\right]$

$$\lim_{n\to+\infty}\left[۴-\frac{۳۰}{n+۷}\right] = \left[۴-0^+\right] = \left[۴^-\right] = ۳$$

همگرا به ۳ می‌باشد.

$$\sqrt{n+۱}-\sqrt{n} \times \frac{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}} = \frac{۱}{\sqrt{n+۱}+\sqrt{n}} \Rightarrow \frac{۱}{\sqrt{۲}+۱}, \frac{۱}{\sqrt{۳}+\sqrt{۲}}, \frac{۱}{\sqrt{۴}+\sqrt{۳}}, \dots$$

دنباله نزولی است.

الف) $\lim_{x\to ۲^+}\frac{\sqrt{x^۲-۴}}{x-۲} = \lim_{x\to ۲^+}\frac{\cancel{\sqrt{x-۲}}\cdot\sqrt{x+۲}}{\cancel{\sqrt{x-۲}}\,\sqrt{x-۲}} = \frac{\sqrt{۴}}{0^+} = +\infty$

ب) $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{\sqrt{۱-\sin^۲ x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{\sqrt{\cos^۲ x}} = \lim_{x\to\frac{\pi}{۲}}\frac{\cos x}{|\cos x|}$

حد راست: $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^+}\frac{\cos x}{\cos x} = ۱$

حد چپ: $\lim_{x\to\frac{\pi}{۲}^-}\frac{\cos x}{-\cos x} = -۱$

حد چپ و حد راست برابر نیست، پس حد ندارد.

ج) $\lim_{x\to\infty}\frac{۲x}{۱+x}\,\mathrm{Arc}\tan x = ۲\times\underbrace{\mathrm{Arc}\tan\infty}_{\frac{\pi}{۲}} = ۲\times\frac{\pi}{۲} = \pi$

$\sin\frac{\pi}{x+۱}$ در $x=-۱$ فاقد حد است، پس درصورتی تابع $f(x)$ حد دارد که $x=-۱$ ریشه $x^۲+ax+۱$ باشد. ۸.

$x^۲+ax+۱ \Rightarrow (-۱)^۲+a(-۱)+۱=0 \rightarrow a=۲$

پس: $f(x) = (x^۲+۲x+۱)\sin\frac{\pi}{x+۱}$

$f(۳) = (۹+۶+۱)\sin\frac{\pi}{۴} = ۸\sqrt{۲}$

$$x - x^3 \le x f(x) \le \sin x \xrightarrow{\div x} \frac{x - x^3}{x} \le f(x) \le \frac{\sin x}{x}$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{x - x^3}{x} = \lim_{x \to 0} 1 - x^2 = 1$$

$$\lim_{x \to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$$

پس طبق قضیه فشردگی $\lim_{x \to 0} f(x) = 1$.

۱۰. تابع $D(x)$ در هیچ نقطه‌ای حد ندارد. تابع $f(x)$ فقط در ریشه‌های $(x^3 - 4x^2 + 3x)$ حد دارد؛ پس

$$x^3 - 4x^2 + 2x = 0 \Rightarrow x(x^2 - 4x + 3) = 0$$

$$x(x-3)(x-1) = 0$$

پس تابع در ۳ و ۱ و ۰ $= x$ دارای حد است.

۱۱.

$$\lim_{x \to +\infty} \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1000} = 2$$

$$x > M \quad \left| \frac{2x^3 + 1}{x^3 - 1000} - 2 \right| < \varepsilon \Rightarrow \left| \frac{2x^3 + 1 - 2x^3 + 2000}{x^3 - 1000} \right| < \varepsilon$$

$$\Rightarrow \frac{2001}{x^3 - 1000} < \varepsilon \to \frac{2001}{\varepsilon} + 1000 < x^3 \to \sqrt[3]{\frac{2001}{\varepsilon} + 1000} < x$$

پس برای $M \ge \sqrt[3]{\frac{2001}{\varepsilon} + 1000}$ حد فوق برابر ۲ است.

۱۲.

$$\begin{cases} a_n = \frac{1}{n} \\ b_n = -\frac{1}{n} \end{cases} \Rightarrow \lim_{n \to \infty} a_n = \lim_{n \to \infty} b_n = 0, \quad f(a_n) = 1, \; f(b_n) = -1$$

چون $\lim_{n \to +\infty} f(a_n) \ne \lim_{n \to +\infty} f(b_n)$ ، لذا $f(x)$ در صفر حد ندارد.